



UNIVERSITAT DE  
BARCELONA

Trabajo Final de Grado

DOBLE TITULACIÓN DE  
MATEMÁTICAS Y ADMINISTRACIÓN  
Y DIRECCIÓN DE EMPRESAS

Facultad de Matemáticas e Informática

Facultad de Economía y Empresa

Universidad de Barcelona

---

TEORÍA DE LA RUINA Y  
APLICACIONES PRÁCTICAS

---

Autora: Paula Milián Martínez

Tutor de Matemáticas: Dr. Josep Vives

Tutora de ADE: Dra. Mercè Claramunt

Barcelona,

17 de enero de 2019

# ABSTRACT

For the insurers, the calculation of their probability of ruin depends on random phenomena. This research aims to find a methodology for the determination of the ruin probability of an insurance company. Furthermore, this research aims to apply the results in some practical cases.

For the explained above, it is going to be developed a Ruin Theory, under different models for the cash flow, in terms of the number of claims and its amount. Specifically, there are going to be explained the Classical and Renewal Models of Cramér-Lundberg and the Net Profit Condition. These will be the assumptions under which an explicit equation can be given for the probability of ruin or a limit to approximate it.

Finally, all of the above will be applied assuming a distribution function for the amount of claims. It is going to be analyzed how the probability of Ruin is affected against the variation of the initial capital or the security surcharge for infinite time and it is going to be simulated some data to approximate the probability of Ruin in a finite time.

# RESUMEN

Para las compañías aseguradoras el cálculo de su probabilidad de Ruina depende de fenómenos aleatorios. El objeto de este estudio es dar una metodología para determinar la probabilidad de ruina de una compañía aseguradora y aplicar los resultados obtenidos a casos prácticos.

Por lo anterior, se desarrolla una Teoría de la Ruina bajo distintos modelos para el flujo de caja, en términos del número de siniestros y el importe estos. En particular, se analiza con detalle los Modelos Clásico y de Renovación de Cramér-Lundberg y la Condición de Beneficio Neto. Estos son los supuestos bajo los que se puede dar una fórmula explícita para la probabilidad de ruina o una cota para aproximarla.

Por último, se aplica todo lo anterior suponiendo una función de distribución para el importe de los siniestros. Se analiza como se ve afectada la probabilidad de Ruina frente a la variación del capital inicial o el recargo de seguridad para tiempo infinito y se simulan datos para aproximar la probabilidad de Ruina en un tiempo finito.

# AGRADECIMIENTOS

*"Lo que hace bonito un desierto es que en algún lugar esconde un pozo."* -Antoine de Saint-Exupéry (El principito).

En primer lugar agradecer a mis dos tutores Josep Vives y Mercè Claramunt. Al primero de ellos la paciencia y apoyo durante estos meses y las mil veces que ha tenido tiempo para mi y mi trabajo. A Mercè la pasión por las ciencias actuariales y mostrarme la aplicación de los conceptos matemáticos.

Agradecer también a todos los compañeros que me han ayudado en esta andadura, desde los primeros cursos hasta el final.

Por último, pero no menos importante, a mi familia por darme las herramientas para ser quien soy y confiar siempre en todas mis ocurrencias.

# Índice

<b>1. INTRODUCCIÓN</b>	<b>1</b>
<b>2. LA TEORÍA DEL RIESGO Y EL PROBLEMA DE LA RUINA</b>	<b>3</b>
2.1. MODELOS DE SINIESTROS PARA NO VIDA Y CONSECUENCIAS	3
2.2. PROCESO DE RIESGO, PROBABILIDAD DE RUINA Y CONDI- CIÓN DE BENEFICIO NETO . . . . .	5
2.2.1. PROCESO DE RIESGO . . . . .	5
2.2.2. PROBABILIDAD DE RUINA . . . . .	7
2.2.3. RESULTADOS ELEMENTALES . . . . .	7
2.2.4. CONDICIÓN DE BENEFICIO NETO (NPC) . . . . .	9
<b>3. TEORÍA DE LA RENOVACIÓN</b>	<b>12</b>
<b>4. COLA DE LA DISTRIBUCIÓN DE LOS TAMAÑOS DE RE-     CLAMACIÓN</b>	<b>16</b>
<b>5. TAMAÑOS DE RECLAMACIÓN PEQUEÑOS</b>	<b>18</b>
5.1. TEOREMA DE CRAMÉR-LUNDBERG . . . . .	18
5.2. INECUACIÓN DE LUNDBERG . . . . .	20
5.3. ASINTÓTICOS EXACTOS PARA LA PROBABILIDAD DE RUI- NA: EL CASO DEL RECLAMO PEQUEÑO . . . . .	22
<b>6. LA REPRESENTACIÓN DE LA PROBABILIDAD DE RUINA     COMO UNA PROBABILIDAD GEOMÉTRICA COMPUESTA</b>	<b>28</b>
<b>7. TAMAÑOS DE RECLAMACIÓN GRANDES</b>	<b>30</b>
7.1. VARIACIÓN REGULAR DE LOS TAMAÑOS DE RECLAMACIÓN Y SUS AGREGADOS . . . . .	30
7.2. TEORÍA DE CRAMÉR-LUNDBERG PARA DISTRIBUCIONES SUBEXPONENCIALES . . . . .	33
7.2.1. DISTRIBUCIONES SUBEXPONENCIALES . . . . .	33
7.3. SUMA TOTAL DEL RECLAMO EN EL CASO SUBEXPONENCIAL	37
<b>8. APLICACIONES DE LA TEORÍA DE LA RUINA</b>	<b>38</b>
8.1. CASO EXPONENCIAL . . . . .	38
8.1.1. RESULTADOS PREVIOS PARA LA DISTRIBUCIÓN EX- PONENCIAL . . . . .	39

8.1.2.	VARIACIÓN DEL CAPITAL INICIAL . . . . .	40
8.1.3.	VARIACIÓN DEL RECARGO DE SEGURIDAD . . . . .	41
8.2.	CASO GAMMA . . . . .	43
8.2.1.	VARIACIÓN DEL CAPITAL INICIAL . . . . .	43
8.2.2.	VARIACIÓN DEL RECARGO DE SEGURIDAD . . . . .	44
8.3.	MIXTA DE EXPONENCIALES . . . . .	45
8.3.1.	RESULTADOS PREVIOS PARA LA MIXTA DE EXPO- NENCIALES . . . . .	45
8.3.2.	VARIACIÓN DEL CAPITAL INICIAL . . . . .	46
8.3.3.	VARIACIÓN DEL RECARGO DE SEGURIDAD . . . . .	47
8.4.	SIMULACIÓN DE DATOS . . . . .	47
<b>9.</b>	<b>CONCLUSIONES</b>	<b>48</b>
<b>10.</b>	<b>ANEXO</b>	<b>50</b>
10.1.	TABLAS DEL APARTADO 8 . . . . .	50
10.1.1.	Variación del capital inicial de la Exponencial . . . . .	50
10.1.2.	Variación del recargo de seguridad de la Exponencial . . . . .	50
10.1.3.	VALORES DE $\lambda$ GRANDES . . . . .	51
10.1.4.	Variación del capital inicial de la Gamma . . . . .	51
10.1.5.	Variación del recargo de seguridad de Gamma . . . . .	52
10.1.6.	Variación del capital inicial de la Mixta de Exponenciales . . . . .	52
10.1.7.	Variación del recargo de seguridad para la Mixta de Expo- nenciales . . . . .	53
10.1.8.	SIMULACIONES . . . . .	53
10.2.	CÁLCULO DE LA PROBABILIDAD DE RUINA Y LA INECUAN- CIÓN DE LUNDBERG EN C, PARA EL APARTADO 8 . . . . .	54
10.2.1.	FUNCIÓN EXPONENCIAL Y GAMMA . . . . .	54
10.2.2.	MIXTA DE EXPONENCIALES . . . . .	57
10.3.	SIMULACIÓN DE DATOS EN R, PARA EL APARTADO 8.4 . . . . .	58
10.3.1.	$X \sim \text{Exp}(0,01) \lambda = 1 c = 110$ . . . . .	58
10.3.2.	$X \sim \text{Exp}(0,01) \lambda = 100 c = 11000$ . . . . .	59
10.3.3.	$X \sim \text{Exp}(0,01) \lambda = 1000 c = 110000$ . . . . .	60
10.3.4.	$X \sim \text{Gamma}(200,2) \lambda = 1 c = 110$ . . . . .	60
10.3.5.	$X \sim \text{Gamma}(200,2) \lambda = 100 c = 11000$ . . . . .	61
10.3.6.	$X \sim \text{Gamma}(200,2) \lambda = 1000 c = 110000$ . . . . .	62

10.3.7. $X \sim MExp(0,3,1/70,0,7,7/790)$ $\lambda = 1$ $c = 110$ . . . . .	63
10.3.8. $X \sim MExp(0,3,1/70,0,7,7/790)$ $\lambda = 100$ $c = 11000$ . . . .	64
10.3.9. $X \sim MExp(0,3,1/70,0,7,7/790)$ $\lambda = 1000$ $c = 110000$ . . . .	65

# 1. INTRODUCCIÓN

Para cualquier compañía es deseable conocer su probabilidad de ruina y que ésta sea lo más cercana a 0 posible. Dado que de ello depende la rentabilidad y/o supervivencia de la empresa. Además para las compañías aseguradoras, cuyos ingresos y gastos dependen de fenómenos aleatorios, el estudio de la probabilidad de ruina irá relacionado con la modelización de dichos fenómenos.

A vista de lo anterior, en las siguientes páginas se intentará dar respuesta a como calcular la probabilidad de ruina de una compañía aseguradora dependiendo del tipo de distribución que sigan los importes de los siniestros. A tal fin, el trabajo contendrá un marco teórico con las demostraciones pertinentes y una parte práctica con la aplicación de los resultados teóricos.

En este sentido, el primer apartado incluye los dos modelos principales a tener en cuenta para desarrollar la Teoría de la Ruina: el Modelo Clásico de Cramér-Lundberg y el Modelo de Renovación de Cramér-Lundberg, que es una generalización del primero. En este punto se definen también algunos conceptos introductorios, el Proceso de Riesgo y la Condición de Beneficio Neto.

Con respecto al siguiente punto del trabajo, éste se basa en lo que P. Embrechts et.al. [2] identifican como Teoría de la Renovación. En ella, se define la Función de Renovación y sus propiedades más relevantes, el Teorema de Blackwell y el Teorema de Smith, los dos últimos relacionan la Función de Renovación con su integrabilidad.

La tercera sección constituye un capítulo teórico donde se introduce como concepto el peso de la cola de la distribución del tamaño de los siniestros. En este sentido, cuando una cartera tiene muchos siniestros costosos se dice que es de cola pesada y cuando el monto del coste es debido a siniestros punta elevados, que es de cola ligera.

A continuación la presente investigación se centra en los importes de reclamación pequeños. Para ello, se formulan y demuestran teoremas aplicables a este tipo de reclamos, como el Teorema de Cramér-Lundberg o la Inecuación de Lundberg, que permiten acotar la probabilidad de ruina en estos casos.

En el apartado anterior se han visto lemas generales para cualquier tamaño de siniestro, a partir de los cuales se puede representar la probabilidad de ruina como una probabilidad geométrica compuesta.

Para finalizar el marco teórico se estudia que sucede cuando los importes de reclamación son grandes, dado que hay ciertas hipótesis del apartado anterior que no se pueden asumir. Las distribuciones subexponenciales dan modelos adecuados

para este tipo de siniestros, es por ello que serán el eje central del apartado.

La parte práctica de la presente investigación consiste en la aplicación de todo lo anterior. Mediante la variación de distintos parámetros se observará como se ve afectada la probabilidad de ruina. Finalmente, siguiendo la Ley de Solvencia II se han simulado valores en un tiempo finito 1, para obtener una probabilidad de ruina.



## 2. LA TEORÍA DEL RIESGO Y EL PROBLEMA DE LA RUINA

Esta sección se inicia desarrollando los Modelos Clásicos para modelizar los siniestros de una cartera, los cuales se pueden ver en P. Embrechts, C. Klüppelberg y T. Mikosch [2] página 22. Además, se estudian sus resultados y se presenta la Teoría de la Ruina con las definiciones necesarias, para las que se sigue el primer punto del cuarto capítulo de T. Mikosch [1] y el primer punto del primer capítulo de P. Embrechts, C. Klüppelberg y T. Mikosch [2].

### 2.1. MODELOS DE SINIESTROS PARA NO VIDA Y CON-SECUENCIAS

#### MODELO CLÁSICO DE CRAMÉR-LUNDBERG

- (a) Importe del siniestro:  $X_i \geq 0$

Las  $X_i$ , también denominadas tamaño de reclamación, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con función de distribución  $F$ . Media finita  $\mu = EX_i$  y varianza finita  $\sigma^2 = \text{Var}(X_i)$ .

- (b) Tiempo de reclamación:  $T_i$

Las reclamaciones se dan en momentos aleatorios del tiempo. Se define  $T_i$  como el instante de tiempo en el que se produce la  $i$ -ésima reclamación. Es razonable suponer que

$$0 < T_1 < T_2 < \dots$$

- (c) Proceso de llegada de la reclamación:  $N(t)$  Se define el número de reclamaciones que se dan en un intervalo de tiempo  $[0, t]$ , como una variable aleatoria discreta tal que

$$N(t) = \sup\{n \geq 1 : T_n \leq t\}, t \geq 0,$$

Por convenio se supone que  $\sup \emptyset = 0$ .

- (d) Tiempo entre ocurrencia de las reclamaciones:  $Y_i$

Son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con distribución exponencial y media finita  $EY_1 = 1/\lambda$ , definidas como:

$$Y_1 = T_1, \dots, Y_k = T_k - T_{k-1}.$$

- (e) Las sucesiones de  $(X_k)$  y  $(Y_k)$  son independientes.

#### MODELO DE CRAMÉR-LUNDBERG DE RENOVACIÓN

Este modelo viene dado por las condiciones anteriores, pero sustituyendo la condición (d) por la siguiente:

(d') Tiempo entre ocurrencia de las reclamaciones:  $Y_i$

Son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita  $EY_1 = 1/\lambda$ , definidas como:

$$Y_1 = T_1, \dots, Y_k = T_k - T_{k-1}.$$

La diferencia entre los dos modelos expuestos reside en el apartado d: mientras que para el modelo Clásico las reclamaciones de tiempo entre ocurrencias se distribuyen mediante una exponencial, para el Modelo de Renovación, aun teniendo media  $EY_1 = 1/\lambda$ , no necesariamente deben ser exponenciales. Definamos los siguientes conceptos a partir de H. Panjer y G. Willmot [3] páginas 63-73.

**Definición 2.1.** Sea  $N = \{N(t); t \geq 0\}$  es un proceso de conteo si se cumplen las siguientes condiciones:

- (a)  $N(0) \geq 0$ .
- (b)  $N(t)$  es un valor entero.
- (c)  $N(t)$  es no decreciente, por tanto,  $s < t$ ,  $N(s) \leq N(t)$ .

El proceso de conteo  $N = \{N(t); t \geq 0\}$  representa el número total de eventos que han sucedido en un tiempo  $t$ . Además, para  $s < t$ , la diferencia  $N(t) - N(s)$  representa los eventos ocurridos en el intervalo  $(s, t]$ .

**Definición 2.2.** Un proceso de Poisson homogéneo con parámetro  $\lambda > 0$ , es aquel que cumple las siguientes propiedades:

- (a) Se inicia en cero:  $N(0) = 0$ .
- (b) Los incrementos son independientes y estacionarios.
- (c) Para todo  $t > 0$ ,  $N(t)$  es una variable aleatoria Poisson con parámetro  $\lambda t$ :

$$P(N(t) = k) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

**Definición 2.3.** Un proceso de Poisson no homogéneo es el que cumple las características anteriores, pero los incrementos dejan de ser estacionarios.

**Definición 2.4.** Un proceso de Poisson mixto es aquel que cumple las características del homogéneo, pero pierde la independencia entre los incrementos.

Una vez introducidas las definiciones anteriores se detallan a continuación algunas consecuencias de los modelos de Cramér-Lundberg anteriores.

**Corolario 2.5.** El número de reclamaciones  $N(t)$ , en el modelo Clásico, viene dado por un proceso de Poisson homogéneo con parámetro  $\lambda > 0$ . En particular es un proceso de Lévy por las dos primeras condiciones del proceso de Poisson homogéneo.

Solo se cumple el corolario para el caso Clásico porque, si los tiempos dejan de ser exponenciales, el número de reclamaciones deja de ser Poisson.

**Observación 2.6.** El Modelo de Renovación es una generalización del Clásico, permite procesos de conteo de renovación, que son más generales que los procesos de Poisson para la ocurrencia de siniestros. Respecto a los procesos de conteo de renovación se hace referencia en la Definición 3.1. de este documento.

**Definición 2.7.** Se define la función  $S$ , coste total de las reclamaciones o siniestros como

$$S(t) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{N(t)} X_i & \text{si } N(t) > 0 \\ 0 & \text{si } N(t) = 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

Donde  $X_i$  y  $N(t)$  son variables aleatorias como las descritas anteriormente para el Modelo de Renovación.

**Definición 2.8.** Distribución del tamaño total de la reclamación para el modelo Clásico,

$$G_t(x) = P(S(t) \leq x) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} F^{*n}(x), \quad x \geq 0, \quad t \geq 0,$$

donde  $F^{*n}(x) := P(\sum_{i=1}^n X_i \leq x)$  es la  $n$ -ésima convolución de  $F$ . En particular,

$$F^{*0}(x) = \mathbb{1}_{[0, \infty)}(x).$$

## 2.2. PROCESO DE RIESGO, PROBABILIDAD DE RUINA Y CONDICIÓN DE BENEFICIO NETO

### 2.2.1. PROCESO DE RIESGO

**Definición 2.9.** Se define la función de ingreso por primas como  $p$ , asumiendo que es una función determinista, conocida a priori y lineal.

$$p(t) = ct, \quad c > 0. \quad (2.2)$$

La constante  $c$  es la tasa de ingresos por primas.

**Definición 2.10.** Se define el proceso de riesgo resultante  $U$ , como el capital que tiene la compañía en el momento  $t$ .

$$U(t) = u + p(t) - S(t), \quad t \geq 0, \quad (2.3)$$

donde  $u$  es el capital inicial, el cual es necesario que tome un valor grande. El proceso de riesgo  $U = (U(t))_{t \geq 0}$ , describe el flujo de caja de la compañía. Cuando éste es creciente se está incrementando capital y cuando es decreciente se está perdiendo. Si  $U$  alcanza el valor 0, el evento recibe el nombre de ruina.

Vemos en los siguientes gráficos como se relacionan los conceptos del número de siniestros, el coste total y el proceso de riesgo.

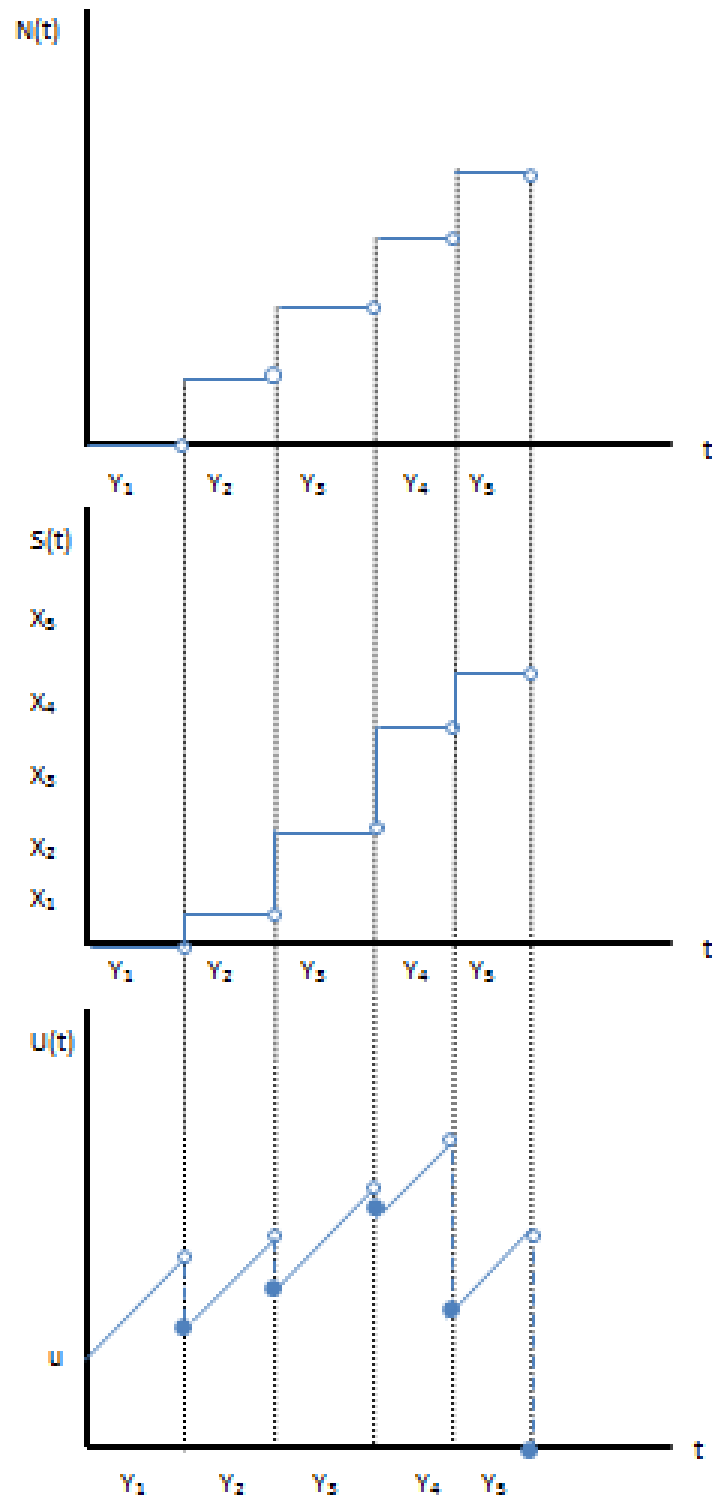


Figura 1: Gráfica de  $N(t)$ ,  $S(t)$ ,  $U(t)$ .

### 2.2.2. PROBABILIDAD DE RUINA

**Definición 2.11.** Se define como Ruina el evento que provoca que  $U$  se convierta en 0:

$$\text{Ruina} = \{U(t) < 0 \text{ para algún } t > 0\}.$$

**Definición 2.12.** La probabilidad de ruina en un tiempo finito  $T$  se define como:

$$\psi(u, T) = P(U(t) < 0 \text{ para algún } t \leq T), \quad 0 < T < \infty, \quad u \geq 0.$$

**Definición 2.13.** La probabilidad de ruina en un tiempo infinito se define como:

$$\psi(u) = \psi(u, \infty), \quad u \geq 0.$$

**Definición 2.14.** El tiempo de ruina viene dado por:

$$\tau(T) = \inf\{t : 0 \leq t \leq T, U(t) < 0\} \quad 0 < T \leq \infty.$$

Por convenio se tiene que  $\inf \emptyset = \infty$ . Para tiempo infinito se denota  $\tau = \tau(\infty)$ .

### 2.2.3. RESULTADOS ELEMENTALES

En esta sección se desarrollan dos lemas necesarios para los conceptos que vendrán a continuación. Estos lemas consisten en formular la esperanza del proceso de riesgo. Dependiendo de si se considera el modelo Clásico o el de Renovación los resultados serán distintos. Este punto se puede seguir en P. Embrechts, C. Klüppelberg y T. Mikosch [2] página 24.

**Lema 2.15.** Para el Modelo de Renovación se cumple

$$EU(t) = u + ct - \mu EN(t).$$

*Demostración.* La esperanza de  $S$  es el momento de primer orden. Por lo tanto, se puede calcular a partir de la función generatriz de momentos. Sea  $X$  una variable aleatoria con función de densidad  $f(x)$ , la función generatriz de momentos se define como:

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x) dx$$

Sus características más relevantes son:

- $M_X^{(n)}(0) = E(X^n)$ .
- $M_X(0) = 1$ .

Por tanto, usando  $ES = M'_S(0)$  se calcula  $M_S(t)$ .

$$\begin{aligned}
M_S(t) &= E[e^{tS}] = \sum_{n=0}^{\infty} E[e^{tS} | N_T = n] P(N_T = n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} E\left[\prod_{i=1}^n e^{tX_i} | N_T = n\right] P(N_T = n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \prod_{i=1}^n E(e^{tX_i}) P(N_T = n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} M_X(t)^n P(N_T = n) = E[M_X(t)^{N_T}] \\
&= E[e^{N_T \ln M_X(t)}] = M_{N_T}(\ln M_X(t)).
\end{aligned}$$

Derivando la función se obtiene:

$$M'_S(t) = M'_N(\ln M_X(t)) \cdot M'_X(t) \cdot \frac{1}{M_X(t)}$$

Para  $t = 0$ :

$$M'_S(0) = M'_N(\ln M_X(0)) \cdot M'_X(0) \cdot \frac{1}{M_X(0)} = M'_N(\ln 1) \cdot EX \cdot \frac{1}{1} = M'_N(0) \cdot EX = EN \cdot EX.$$

Se finaliza la demostración a partir de la primera hipótesis de los modelos de Cramér-Lundberg,  $EX = \mu$ .

**Corolario 2.16.** *A partir de la demostración anterior se evidencia que*

$$ES(t) = EN(t) \cdot EX. \quad (2.4)$$

**Lema 2.17.** *Para el Modelo Clásico de Cramér-Lundberg se cumple que*

$$EU(t) = u + ct - \mu\lambda t.$$

*Demostración.* La demostración es análoga a la anterior, teniendo en cuenta que para el modelo de Cramér-Lundberg se tiene  $EN(t) = \lambda t$ , por ser un Proceso de Poisson Homogéneo.

A partir de los dos lemas anteriores se puede realizar la primera aproximación al valor de los ingresos por primas,  $c$ . Lo que se pretende es encontrar un valor tal que la probabilidad de Ruina sea lo más pequeña posible. Es por ello, que lo primero que se debe suponer es que  $\psi(u) < 1$ ,  $\forall u \geq 0$ . Es evidente que  $\psi(u) = P(\tau < \infty)$ , por lo tanto  $\psi(u) < 1$  si  $P(\tau = \infty) > 0$ . Si se da lo anterior, la compañía tendrá una probabilidad positiva de supervivencia infinita a largo plazo. (Hay que tener en cuenta que los ajustes a esta estrategia se deben llevar a cabo con anterioridad al cobro de primas, por tanto se debe hacer una predicción).

A partir del Lema 2.15 y la Proposición 3.4. se ve para el Modelo de Renovación que para  $t \rightarrow \infty$ ,

$$EU(t) = u + (c - \lambda\mu)t(1 + o(1)) = u + \left(\frac{c}{\lambda\mu} - 1\right)\lambda\mu t(1 + o(1)).$$

Tenemos que  $\frac{EU(t)}{t} \rightarrow c - \lambda\mu$ . De aquí se obtiene una condición de solvencia obvia, la necesidad de que  $c - \lambda\mu > 0$  puesto que ello implica que  $U(t)$  sea positiva para un valor de  $t$  grande. De esto se deduce la Condición de Beneficio Neto básica del Modelo de Renovación, de ahora en adelante NPC.

#### 2.2.4. CONDICIÓN DE BENEFICIO NETO (NPC)

Para poder definir la Condición de Beneficio Neto es necesario introducir los siguientes conceptos previos.

**Definición 2.18.** *Se define el recargo de seguridad como  $\rho = \frac{c}{\lambda\mu} - 1 > 0$ . Se interpreta como el riesgo de la tasa de prima. De hecho, los ingresos por primas del periodo  $[0, t]$  equivalen a  $ct = (1 + \rho)\lambda\mu t$ .*

**Definición 2.19.** *ESQUELETO DE UN PROCESO*

*Por la construcción del Proceso de Riesgo  $U$ , la ruina puede ocurrir solo en los tiempos  $t = T_n$ ,  $n \geq 1$ , ya que  $U$  aumenta en los intervalos  $[T_n, T_{n+1})$ . La sucesión  $(U(T_n))_n$  recibe el nombre de Skeleton Process del proceso de riesgo  $U$ .*

Usando este proceso se puede expresar la ruina en función de los tiempos de entre ocurrencias  $Y_n$ , el tamaño de las reclamaciones  $X_n$  y la tasa de ingresos por prima  $c$ .

$$\begin{aligned} Ruina &= \{\inf_{t>0} U(t) < 0\} = \{\inf_{n \geq 1} U(T_n) < 0\} = \{\inf_{n \geq 1} [u + p(T_n) - S(T_n)] < 0\} = \\ &= \{\inf_{n \geq 1} [u + cT_n - \sum_{i=1}^n X_i] < 0\}. \end{aligned}$$

Asumiendo que  $Y_j > 0$  casi seguramente  $\forall j \geq 1$ . Se escribe,

$$Z_n = X_n - cT_n, \quad R_n = Z_1 + \cdots + Z_n, \quad n \geq 1, \quad R_0 = 0.$$

Se obtiene la siguiente expresión alternativa para la probabilidad de ruina  $\psi(u)$  con capital inicial  $u$ .

$$\psi(u) = P(\inf_{n \geq 1} (-R_n) < -u) = P(\sup_{n \geq 1} R_n > u).$$

Ambas sucesiones  $(Y_i)$  y  $(X_i)$  están formadas por variables aleatorias iid y son independientes la una de la otra.

Se quiere evitar la probabilidad de ruina igual a 1, lo que es equivalente a que la probabilidad de que la cola del camino aleatorio  $(R_n)_n$  exceda el valor de  $u$  sea tan pequeña que el evento de ruina se pueda excluir de cualquier consideración práctica con un capital inicial  $u$  suficientemente grande. Es decir,

$$\psi(u) < 1 \Leftrightarrow 1 - \psi(u) = P(\sup_{n \geq 1} R_n \leq u) > 0, \quad u \geq 0.$$

Por lo tanto, en el Modelo de Renovación la probabilidad de no ruina  $1 - \psi(u)$  consiste en el estudio de la función de distribución del camino aleatorio  $(R_n)_n$ .

A partir de lo anterior se quiere concluir, junto con resultados asintóticos, propiedades elementales de la probabilidad de Ruina.

Suponemos que  $EY_1$  y  $EX_1$  son finitas, dado que es una condición de regularidad débil que se da en la mayoría de los casos de interés práctico. También sabemos que  $EZ_1 = EX_1 - cEY_1$  está bien definida y es finita. Entonces el camino aleatorio  $(R_n)_n$  satisface la ley fuerte de los grandes números:

$$\frac{R_n}{n} \xrightarrow{a.s.} EZ_1 \quad a.s. \quad n \rightarrow \infty,$$

Esto implica en particular, que  $R_n \xrightarrow{q.s.} \pm\infty$  a.s. dependiendo del signo de  $EZ_1$ . Así pues si  $EZ_1 > 0$ , la ruina es inevitable sea cual sea el capital inicial  $u$ . Si  $EZ_1 = 0$  entonces  $\exists(n_k(w)), (m_k(w))$  subsucesiones tales que  $R_{n_k}(w) \rightarrow \infty$  y  $R_{m_k}(w) \xrightarrow{a.s.} -\infty$ . Para este caso  $\psi(u) = 1$  también. Se puede concluir que si  $EY_1$  y  $EX_1$  son finitas y dada la condición  $EZ_1 = EX_1 - cEY_1 \geq 0$ ,  $\forall u > 0$  fijada, la Ruina ocurre con probabilidad 1.

En general, el Modelo de Renovación satisface la NPC si  $EZ_1 = EX_1 - cEY_1 < 0$ . La interpretación es intuitiva, se pretende que dada una unidad de tiempo, el tamaño del reclamo esperado  $EX_1$  sea menor que el ingreso de la prima esperada en esta unidad de tiempo representada por  $cEY_1$ .

**Corolario 2.20.** *El Modelo Clásico es un caso concreto del de Renovación, por lo que se puede aplicar la teoría anterior para el cálculo del recargo de seguridad.*

*Demostración.* Sea  $EX_1 = \mu$  y  $EY_1 = 1/\lambda$ . Por lo que  $EZ_1 = \mu - \frac{c}{\lambda}$ . Que el valor esperado de  $Z_1$ ,  $EZ_1$ , sea negativo coincide con la NPC planteada. Equivalentemente  $\rho = \frac{c}{\lambda\mu} - 1 > 0$ .

**Corolario 2.21.** *A partir de la definición de la NPC se puede expresar  $c$  en función de ésta. Se ha visto en el Corolario 2.12 que se puede escribir el valor esperado del coste total como*

$$ES(t) = EN(t)EX_1 = \lambda t EX_1 = \frac{EX_1}{EY_1} t. \quad (2.5)$$



Sea  $p(t) = ct$ . En función de  $\rho$  y lo anterior se puede expresar como

$$p(t) = (1 + \rho)ES(t) = (1 + \rho)\frac{EX_1}{EY_1}t. \quad (2.6)$$

Equivalentemente, se puede escribir la tasa de ingresos por primas como

$$c = (1 + \rho)\frac{EX_1}{EY_1}. \quad (2.7)$$

Entonces  $EZ_1 < 0$  cumpliendo la NPC.

Así pues, queda concluido éste apartado donde se ha introducido la Teoría de la Ruina y la Condición de Beneficio Neto, que serán fundamentales en los siguientes capítulos.

### 3. TEORÍA DE LA RENOVACIÓN

Este capítulo se centra en la Teoría de la Renovación, cuyos resultados serán utilizados en las próximas secciones. Este apartado se puede seguir tanto en P. Embrechts, C. Klüppelberg y T. Mikosch [2] páginas 587-590, o bien T. Mikosch [1] páginas 66-68.

**Definición 3.1.**  $(N(t))_{t \geq 0}$  es un proceso de conteo de renovación si

$$N(t) = \sup\{n \geq 1 : T_n \leq t\}, \quad t \geq 0,$$

y

$$T_n = Y_1 + \dots + Y_n, \quad n \geq 1$$

donde  $Y_1, Y_2, \dots$  son variables aleatorias no negativas e iid con una función de distribución  $F_Y$  apropiada, tal que  $F_Y(0) = 0$  y  $EY_1 = \frac{1}{\lambda} < \infty$ .

**Observación 3.2.** A partir de lo anterior se observa que

$$\{T_n \leq t\} = \{N(t) \geq n\} \quad (3.1)$$

La Ley Fuerte de los Grandes Números de Kolmogorov implica que si  $T_n \xrightarrow{c.s.} \infty$  entonces  $N(t) \xrightarrow{c.s.} \infty$ .

A partir de la observación anterior se puede adaptar la Ley Fuerte de los Grandes Números de Marcinkiewicz-Zygmund y la Ley del Logaritmo iterado, a los procesos de conteo de renovación. Los dos teoremas se pueden ver en P. Embrechts, C. Klüppelberg y T. Mikosch [2] páginas 63 y 67.

**Teorema 3.3. MARCINKIEWICZ-ZYGMUND PARA LOS PROCESOS DE CONTEO DE RENOVACIÓN**

Si suponemos que  $EY = 1/\lambda \leq \infty$ , en particular  $EY = \infty$  si  $\lambda = 0$ . Entonces,

$$t^{-1}N(t) \xrightarrow{c.s.} \lambda. \quad (3.2)$$

Si  $EY^p < \infty$  para algunos  $p \in (1, 2)$  entonces,

$$t^{-1/p}(N(t) - \lambda t) \xrightarrow{c.s.} 0. \quad (3.3)$$

Si  $\sigma_Y^2 = \text{var}(Y) < \infty$  entonces,

$$\begin{aligned} \limsup_{t \rightarrow \infty} (2t \ln \ln t)^{-1/2} (N(t) - \lambda t) &= - \liminf_{t \rightarrow \infty} (2t \ln \ln t)^{-1/2} (N(t) - \lambda t) \\ &= \sigma_Y \lambda^{3/2} \text{ c.s.} \end{aligned}$$

*Demostración.* Se puede ver en el libro P. Embrechts, C. Klüppelberg y T. Mikosch [2] página 103.

A partir de este teorema y teniendo en cuenta para los procesos de Poisson se tiene que  $EN(t) = \lambda t$  y  $\text{var}(N(t)) = \sigma_Y^2 \lambda^3 t$  porque  $EY = 1/\lambda$  y  $\sigma^2 = 1/\lambda$ . Se deriva la siguiente proposición.

**Proposición 3.4.** *Los momentos del Proceso de Conteo de renovación.  
Se supone*

$$a) \quad EN(t) = (\lambda + o(1))t \text{ si } t \rightarrow \infty.$$

$$b) \quad \sigma_Y^2 = \text{Var}(Y) < \infty.$$

*Entonces se tiene que,*

$$EN(t) = \lambda t + O(1), \quad t \rightarrow \infty.$$

$$\text{Var}(N(t)) = \sigma_Y^2 \lambda^3 t + o(t), \quad t \rightarrow \infty.$$

*Demostración.* La proposición ha quedado demostrada por los resultados anteriores.

**Definición 3.5.** *La función  $V(t) = EN(t)$  es la Función de Renovación y da el número medio de renovaciones en el intervalo  $[0, t]$ .*

**Teorema 3.6. TEOREMA ELEMENTAL DE RENOVACIÓN**

*Sea  $V(t)$  la de la Definición 3.4.. Se cumple:*

$$\frac{V(t)}{t} \rightarrow \lambda = \frac{1}{EY_1} \quad t \rightarrow \infty.$$

*Demostración.* La demostración es trivial a partir de la Proposición 3.4.

**Proposición 3.7. PROPIEDADES BÁSICAS DE LA FUNCIÓN DE RENOVACIÓN**

(a)  *$V$  es una función absolutamente continua y no decreciente.*

(b)  *$V(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{*n}(t) < \infty \quad \forall t \geq 0,$*

(c)  *$V(t)$  satisface la ecuación de renovación*

$$V(t) = F(t) + \int_0^t V(t-x)dF(x), \quad t \geq 0. \quad (3.4)$$

*Demostración.* El apartado c) se puede ver en la página 68 de T. Mikosch [1].

Pasemos a demostrar el apartado b) de la proposición. Sea

$$\begin{aligned}
V(t) &= E(N(t)) = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot P(N(t) = n) \\
&= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k n \cdot [P(N(t) \geq n) - P(N(t) \geq n+1)] \\
&= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k n [P(T_n \leq t) - P(T_{n+1} \leq t)] \\
&= \lim_{k \rightarrow \infty} \left[ \sum_{n=1}^k P(T_n \leq t) \right] - k \cdot P(T_{n+1} \leq t) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} P(T_n \leq t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{*n}(t)
\end{aligned}$$

Si  $N(t)$  es un Proceso de Poisson homogéneo, entonces  $\forall h \geq 0$ ,  $V(t+h) - V(t) = \lambda h$ . Teniendo en cuenta el caso general, cumpliendo el Teorema 3.6, se puede plantear la siguiente aproximación:

$$V(t+h) - V(t) \approx \lambda h \text{ para un } t \text{ grande,}$$

que es cierta por el Teorema de Renovación de Blackwell que se verá a continuación. (Teorema 3.8.)

Se debe tener en cuenta antes de formular el teorema, que los valores aleatorios  $X$  y sus funciones de distribución son lattice. Una variable aleatoria  $X$  es lattice si  $\exists a, d \geq 0$  tales que  $\sum_{n=0}^{\infty} P(X = a + nd) = 1$ .

**Teorema 3.8. TEOREMA DE RENOVACIÓN DE BLACKWELL**

(a) Si  $F$  es no lattice, entonces  $\forall h > 0$ ,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (V(t+h) - V(t)) = \lambda h.$$

(b) Si  $F$  es lattice con paso máximo  $d$ , entonces se mantiene la misma relación límite, siempre que  $h$  sea múltiplo de  $d$ .

*Demostración.* Se puede ver la demostración en W. Feller [5] capítulo XI.

El Teorema de Blackwell se puede reafirmar como un resultado de convergencia débil.

A cada función de renovación  $V(t)$  se le puede asociar una medida de renovación  $V(\cdot)$  mediante  $V(a, b] = V(b) - V(a)$ ,  $a, b > 0$ .  $V(\cdot)$  puede ser extendido a todos

los conjuntos de Borel  $\mathcal{A}$  en  $[0, \infty]$ .

Por el apartado a) del Teorema 3.4.  $V(t + \mathcal{A})$  converge a  $\lambda|\mathcal{A}|$  cuando  $t \rightarrow \infty$ , donde  $|\cdot|$  representa la medida de Lebesgue. Por lo tanto, se puede esperar tener un resultado que se aproxime a la integral de una función regular respecto de  $V$  por la integral de esa función respecto  $\lambda|\cdot|$ .

**Teorema 3.9. RENOVACIÓN DE SMITH**

Dada  $\frac{1}{\lambda} = EY_1 < \infty$  y  $V(t) = EN(t)$  es la función de renovación asociada con función de distribución  $F$  lattice.

(a) Si  $h$  es directamente Integrable Riemann, entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t h(t-x)dV(x) = \lambda \int_0^\infty h(x)dx.$$

(b) Considerando una ecuación del tipo de renovación de la forma

$$g(t) = h(t) + \int_0^t g(t-x)dF(x), \quad t \geq 0.$$

donde  $h$  es localmente finita, entonces la única solución viene dada por

$$g(t) = \int_0^t h(t-x)dV(x), \quad t \geq 0.$$

Además, si  $h$  es directamente Integrable Riemann entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = \lambda \int_0^\infty h(x)dx.$$

*Demostración.* La demostración de este teorema se puede ver en el libro de W. Feller, capítulo XI [5].

Se da por finalizada ésta sección introductoria a la Teoría de Renovación.

## 4. COLA DE LA DISTRIBUCIÓN DE LOS TAMAÑOS DE RECLAMACIÓN

En este capítulo se introducen los conceptos de cola ligera y cola pesada de la función de distribución del importe de los siniestros. Esta sección está fundamentada por T. Mikosch [1] página 92 y H. Albrecher, J. Beirlant y J. Teugels [4] capítulo 3. Las distribuciones con colas pesadas suelen ser aquellas que forman parte de una cartera de reaseguro, donde los reclamos más grandes están asegurados. Son carteras con muchos siniestros de elevado importe.

Las distribuciones de colas pesadas son aquellas en las que el proceso de ruina es espontáneo y está causado por un único siniestro de elevado coste.

**Observación 4.1.** Una metodología común para caracterizar el peso de las colas es tomar la distribución exponencial como punto de referencia. Por lo tanto, si

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}(x)}{e^{-\lambda x}} < \infty \text{ para alguna } \lambda > 0,$$

donde  $\bar{F} = 1 - F$ ,  $F$  tiene una cola ligera. Si

$$\liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}(x)}{e^{-\lambda x}} > 0 \text{ para toda } \lambda > 0,$$

entonces  $F$  tiene una cola pesada.

La observación de puede ver gráficamente:

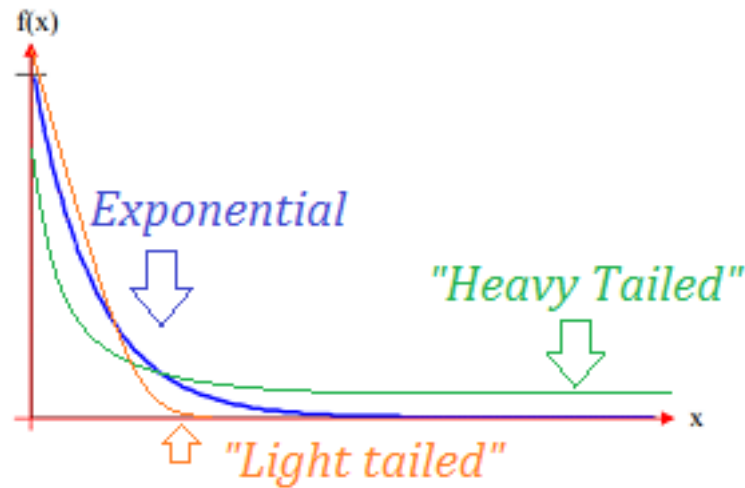


Figura 2: Cola pesada y cola ligera en comparación con la Exponencial. La imagen se puede ver en [7]

**Ejemplo 4.2.** Por las definiciones anteriores se puede afirmar que la distribución exponencial  $Exp(\lambda)$  es una cola ligera para cada  $\lambda > 0$ . También son colas ligeras la distribución Normal, la Normal truncada y la Gamma.

**Ejemplo 4.3.** Por otro lado, un ejemplo típico de cola pesada es la distribución de Pareto con parámetro  $\alpha > 0$  y escalar  $k > 0$  dada por

$$\overline{F}(x) = \frac{k^\alpha}{(k+x)^\alpha}, x > 0.$$

**Ejemplo 4.4.** En el caso de la distribución Weibull el peso de la cola depende del valor del parámetro  $\tau$ , para el escalar  $c > 0$

$$\overline{F}(x) = e^{-cx^\tau}, x > 0.$$

Si  $0 < \tau < 1$  es una cola pesada, pero si  $\tau \geq 1$  entonces es una cola ligera.

## 5. TAMAÑOS DE RECLAMACIÓN PEQUEÑOS

En esta sección se estudiará como es la probabilidad de ruina cuando el coste de los siniestros es pequeño. Para ello se seguirán T. Mikosch [1] 161-177 y P. Embrechts, C. Klüppelberg y T. Mikosch [2] páginas 28-35.

### 5.1. TEOREMA DE CRAMÉR-LUNDBERG

Se inicia este apartado introduciendo las Transformaciones de Laplace-Stieltjes.

**Definición 5.1.** *TRANSFORMACIONES DE LAPLACE-STIELTJES*

Sea  $H$  una función de distribución en  $[0, \infty)$  la transformación de Laplace-Stieltjes viene dada por

$$\hat{h}(s) = \int_{[0, \infty)} e^{-sx} dH(x), s \in \mathbb{R}.$$

**Observación 5.2.** Dependiendo del comportamiento de  $\bar{H}(x) = 1 - H(x)$  para  $x$  grande,  $\hat{h}(s)$  puede ser finita para un conjunto de valores de  $s$  mayores que 0. En general,  $\hat{h}(s) < \infty$  para  $s > -\gamma$  dado, donde  $0 \leq \gamma < \infty$  es la abscisa de convergencia para  $\hat{h}(s)$ .

**Teorema 5.3.** Sea  $H_1, H_2$  funciones de distribución con transformaciones de Laplace-Stieltjes  $\hat{h}_1, \hat{h}_2$  respectivamente. Si  $\hat{h}_1 = \hat{h}_2$  entonces  $H_1 = H_2$ .

*Demostración.* El teorema es equivalente a demostrar que diferentes transformaciones de Laplace  $\hat{g}$  corresponden a distintas funciones de distribución  $H$ . Esta demostración se puede ver en W. Feller [5] página 430.

**Teorema 5.4.** *TEOREMA DE CRAMÉR-LUNDBERG*

Consideremos el modelo Clásico de Cramér-Lundberg con la NPC. Sea  $\rho = \frac{c}{\lambda\mu} - 1 > 0$ . Suponiendo que existe  $\gamma > 0$  tal que

$$\hat{f}_I(-\gamma) = \int_0^\infty e^{\gamma x} dF_I(x) = \frac{c}{\lambda\mu} = 1 + \rho \quad (5.1)$$

Se tienen las siguientes relaciones:

$$(a) \quad \forall u \geq 0, \psi(u) \leq e^{-\gamma u}$$

$$(b) \quad \int_0^\infty x e^{\gamma x} \bar{F}(x) dx < \infty \text{ entonces, } \lim_{u \rightarrow \infty} e^{\gamma u} \psi(u) = C < \infty \text{ donde } C = \left[ \frac{\gamma}{\rho\mu} \int_0^\infty x e^{\gamma x} \bar{F}(x) dx \right]^{-1}$$

(c) Para la función de distribución exponencial se puede expresar la ruina como

$$\psi(u) = \frac{1}{1 + \rho} \exp \left\{ -\frac{\rho}{\mu(1 + \rho)} u \right\}, \quad u \geq 0. \quad (5.2)$$



La demostración de este Teorema se desarrollará en los siguientes apartados. La primera relación coincide con la Inecuación de Lundberg, que se detalla en el apartado 5.2. La implicación b) se demuestra con el Teorema 5.11. Por último, el apartado c) es un resultado de la distribución exponencial, que se demuestra en el Corolario 5.16. del Teorema 5.11.

En los dos primeros casos se verá la demostración cuando  $\gamma$  coincida con el coeficiente de ajuste que se define en la Definición 5.5. Por tanto, el Teorema 5.4., será válido para reclamos pequeños. Hay funciones de distribución para las que este teorema no se puede aplicar. Veamos un contraejemplo:

**Ejemplo 5.5.** Si se supone que la cartera cumple con el modelo Clásico de Cramér-Lundberg para las reclamaciones individuales y estas se modelizan mediante la función de distribución Pareto

$$\overline{F}(x) = (1+x)^{-\alpha} \quad x \geq 0, \alpha > 1,$$

se tiene

$$EX_1 = \int_0^\infty (1+x)^{-\alpha} dx = (\alpha-1)^{-1} \text{ y } \rho = \frac{c(\alpha-1)}{\lambda} - 1 > 0.$$

Para este caso, no se puede calcular un valor estimado de la exponencial de Cramér-Lundberg para una  $C$  que satisfaga la condición anterior. Veámoslo

$$\forall \gamma > 0, \quad \int_0^\infty e^{\gamma x} (1+x)^{-\alpha} dx = \infty.$$

Todo esto se ve reflejado en la siguiente imagen de [2] página 33.

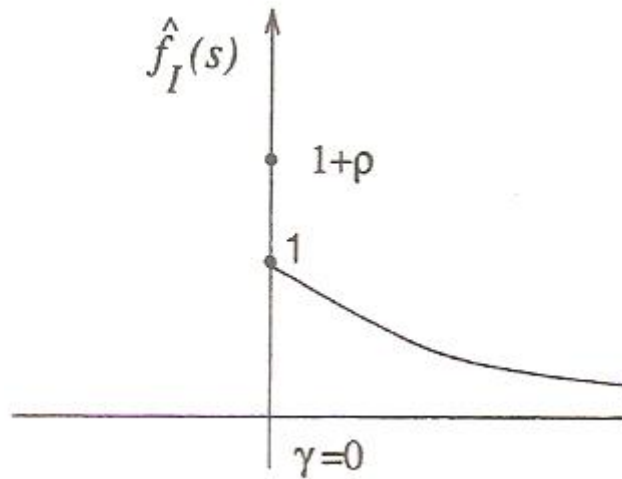


Figura 3: Reclamaciones individuales siguiendo una función de distribución Pareto.

## 5.2. INECUACIÓN DE LUNDBERG

Supongamos el Modelo de Renovación con la NPC. Para las pequeñas reclamaciones, se supone la existencia de la función generatriz de momentos para la función de distribución en un entorno del origen.

$$M_{X_1}(h) = Ee^{hX_1}, \quad h \in (-h_0, h_0) \text{ para algún } h_0 > 0$$

Por la Desigualdad de Markov, para  $h \in (0, h_0)$ ,  $P(X_1 > x) \leq e^{-hx} M_{X_1}(h)$ ,  $\forall x > 0$ . Por lo que,  $P(X_1 > x)$  decrece a cero exponencialmente rápido. Según T. Mikosch [1] esta condición no se adapta a los reclamos de la vida real, ya que suelen tener colas más pesadas y su función generatriz no suele ser finita en ningún entorno del origen. Pese a lo anterior, se usa dicha condición porque el modelo Clásico de Cramér-Lundberg se realizó bajo esa hipótesis.

### Definición 5.6. COEFICIENTE DE LUNDBERG O DE AJUSTE

Suponemos la existencia de la función generatriz de momentos para  $Z_1$  en un entorno del origen  $(-h_0, h_0)$  para  $h_0 > 0$ . Se define el coeficiente de Lundberg como la única solución de la ecuación  $M_{Z_1}(h) = Ee^{h(X_1 - cY_1)} = 1$ , si existe.

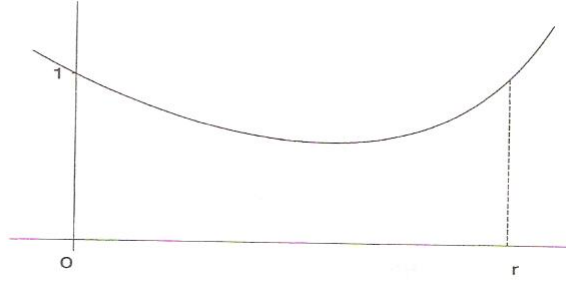


Figura 4: Ejemplo típico de la función  $M_{Z_1}(h)$  con el coeficiente  $r$ .

La existencia de la función generatriz de momentos de  $X_1$ ,  $M_{X_1}(h)$  para  $h \in [0, h_0)$  implica la existencia de la función generatriz de momentos para  $Z_1$  en un entorno del origen,  $M_{Z_1}(h) = M_{X_1}(h)M_{cY_1}(-h)$  para  $h \in [0, h_0)$  ya que  $M_{cY_1}(-h) \leq 1 \quad \forall h \geq 0$ . Para  $h \in (-h_0, 0)$  el mismo argumento implica que  $M_{Z_1}$  existe, si  $M_{cY_1}(-h)$  es finita.

En particular para el Modelo de Cramér-Lundberg con intensidad  $\lambda$  y número de reclamos  $N$ ,

$$M_{cY_1}(h) = \frac{\lambda}{\lambda - ch} \text{ existe para } h < \frac{\lambda}{c}.$$

Estudiemos la unicidad de  $r$ . La función generatriz  $f(h) = M_{Z_1}(h)$  es  $\mathcal{C}^\infty$  en  $(-h_0, h_0)$ . Sabemos que  $f'(0) = EZ_1 < 0$  por la NPC y  $f''(h) = E(Z_1^2 e^{hZ_1}) > 0$  porque  $Z_1 \neq 0$  casi seguramente. Como  $f$  es continua y su derivada en 0 negativa,  $f$  decrece en un entorno del origen. Por lo que queda visto que  $f$  es convexa.

Si existe algún  $h_c \in (0, h_0)$  tal que  $f'(h_c) = 0$ ,  $f$  cambiaría su monotonía de decrecer a crecer en  $h_c$ . Para  $h > h_c$ ,  $f(h)$  crece y por tanto la solución  $f(h) = 1$  es única y existe siempre que la función generatriz de momentos exista en un entorno suficientemente grande del origen. Para ello es suficiente con que exista  $0 < h_1 < \infty$  tal que  $f(h) < \infty$  para  $h < h_1$  y el  $\lim_{h \rightarrow h_1} f(h) = \infty$ . Por tanto, la función generatriz de momentos  $f$  crece continuamente hasta infinito, asumiendo  $f(h) = 1$  para  $h$  suficientemente grande.

**Observación 5.7.** La existencia de la función generatriz de  $Z_1$  en un entorno del origen no es suficiente para demostrar que existe  $r > 0$  con  $f(r) = 1$ .

**Corolario 5.8.** Como consecuencia del Teorema 5.4 se sabe que el coeficiente de ajuste cumple (5.1). Si además, se supone la existencia de  $r$ , esto implica que  $\hat{f}_I(r)$  existe en un entorno no vacío de 0. implicando que la cola de  $\bar{F}$  sea exponencialmente limitada. Es decir, como consecuencia de la inecuación de Markov se cumple

$$\bar{F}_I(x) \leq e^{-rx} Ee^{rX_1}, \quad x > 0$$

De la que se deduce la baja probabilidad de que se den grandes reclamaciones.

**Teorema 5.9. LA INECUACIÓN DE LUNDBERG**

Suponiendo el Modelo de Renovación con la NPC. Suponiendo también la existencia del coeficiente de ajuste  $r$ . Se cumple la siguiente desigualdad

$$\forall u > 0 \quad \psi(u) \leq e^{-ru}.$$

El límite exponencial de la desigualdad de Lundberg asegura que la probabilidad de ruina es muy pequeña si se empieza con un capital inicial  $u$  grande. Pero es evidente que el límite depende de la magnitud del coeficiente de ajuste. Un coeficiente  $r$  pequeño da mayor riesgo a la cartera. En cualquier caso, según T. Mikosch [1] se tiene que bajo una pequeña condición de reclamo y un capital inicial grande, en principio, no hay peligro de ruina en la cartera. Pero esta afirmación no es válida para carteras con tamaños de reclamación grandes.

*Demostración.* Se ve la Desigualdad de Lundberg por inducción. Escribiendo

$$\psi_n(u) = P(\max_{1 \leq k \leq n} R_k > u) = P(R_k > u \text{ para algún } k \in 1, \dots, n),$$

sabiendo que  $\psi_n(u) \uparrow \psi(u)$  cuando  $n \rightarrow \infty$  para todo  $u > 0$ , es suficiente con probar que  $\psi_n(u) \leq e^{-ru}$  para todo  $n \geq 1$  y  $u > 0$ .

Se inicia la inducción con  $n = 1$ . Por la desigualdad de Markov y la definición del coeficiente de ajuste, se tiene

$$\psi_1(u) \leq e^{-ru} M_{Z_1}(r) = e^{-ru}.$$

Una vez visto el caso inicial, se ve que pasa para  $n = k \geq 1$ . Sea  $F_{Z_1}$  la función de distribución de  $Z_1$ .

$$\begin{aligned}\psi_{k+1}(u) &= P(\max_{1 \leq n \leq k+1} R_n > u) \\ &= P(Z_1 > u) + P(\max_{2 \leq n \leq k+1} (Z_1 + (R_n - Z_1)) > u, Z_1 \leq u) \\ &= \int_{(u, \infty)} dF_{Z_1}(x) + \int_{(-\infty, u]} P\left(\max_{1 \leq n \leq k} [x + R_n] > u\right) dF_{Z_1}(x) = p_1 + p_2\end{aligned}$$

Estudiando separadamente los componentes, por la hipótesis de inducción se tiene para  $p_2$  que

$$\begin{aligned}p_2 &= \int_{(-\infty, u]} P(\max_{1 \leq n \leq k} R_n > u - x) dF_{Z_1}(x) \\ &= \int_{(-\infty, u]} \psi_k(u - x) dF_{Z_1}(x) \\ &\leq \int_{(-\infty, u]} e^{r(x-u)} dF_{Z_1}(x).\end{aligned}$$

De manera análoga por la Desigualdad de Markov se tiene para  $p_1$ ,

$$p_1 \leq \int_{(u, \infty)} e^{r(x-u)} dF_{Z_1}(x).$$

Se finaliza la demostración agregando los resultados obtenidos:

$$p_1 + p_2 \leq e^{ru} M_{Z_1}(r) = e^{-ru}.$$

Una vez vista la demostración para  $n = k + 1$ , queda demostrado el apartado a) del Teorema 5.4, Teorema de Cramér-Lundberg.

**Corolario 5.10.** *Los resultados obtenidos son válidos bajo la hipótesis de Modelo de Renovación por lo que en particular también lo son para el Modelo clásico.*

### 5.3. ASINTÓTICOS EXACTOS PARA LA PROBABILIDAD DE RUINA: EL CASO DEL RECLAMO PEQUEÑO

Para el modelo de Cramér-Lundberg Clásico, se pueden formular los siguientes apartados.

#### **Teorema 5.11.** *LÍMITE DE LA RUINA DE CRAMÉR*

*Consideremos el Modelo Clásico y la NPC. Supongamos que la función de distribución del tamaño de reclamación  $F_{X_1}$  tiene densidad, que la función generatriz de momentos de  $X_1$  existe en un entorno del origen  $(-h_0, h_0)$  y que el coeficiente de ajuste  $r$  existe y se encuentra en el mismo intervalo. Se puede expresar la NPC mediante  $\rho$*

$$\rho = c \frac{EY_1}{EX_1} - 1 > 0.$$

Entonces, existe una constante  $C > 0$  tal que

$$\lim_{u \rightarrow \infty} e^{ru} \psi(u) = C,$$

de la que se obtendrá el valor más adelante.

Para la demostración del teorema es necesaria la introducción de la siguiente notación y los siguientes lemas.

**Notación 5.12.** La probabilidad de no ruina, viene dada por  $\varphi(u) = 1 - \psi(u)$  y  $F_A$  es la función distribución de una variable aleatoria  $A$ .

El siguiente lema y las dos observaciones son válidos tanto para tamaño de reclamo grande como pequeño.

**Lema 5.13.** ECUACIÓN INTEGRAL FUNDAMENTAL PARA LA PROBABILIDAD DE NO RUINA

Suponiendo el modelo de Cramér-Lundberg con la NPC,  $EX_1 < \infty$  y suponiendo que la distribución del tamaño de la reclamación  $F_{X_1}$  tiene densidad, la probabilidad de no ruina cumple la ecuación integral:

$$\varphi(u) = \varphi(0) + \frac{1}{(1 + \rho)EX_1} \int_0^u \bar{F}_{X_1}(y) \varphi(u - y) dy.$$

Antes de demostrar el lema es necesaria la introducción de las siguientes observaciones.

**Observación 5.14.** Sea  $F_{X_1, I}(y) = \frac{1}{EX_1} \int_0^y \bar{F}_{X_1}(z) dz$ ,  $y > 0$ , para la función de distribución de cola integrada de  $X_1$ . Es la función de distribución de equilibrio, es función de distribución porque para cualquier variable aleatoria positiva  $A$  tiene  $EA = \int_0^\infty \bar{F}_A(y) dy$ . Por lo tanto,  $F_{X_1, I} \uparrow 1$  como  $y \uparrow \infty$ . Es por todo lo anterior que se puede expresar la ecuación integral de probabilidad de no ruina como

$$\varphi(u) = \varphi(0) + \frac{1}{(1 + \rho)} \int_0^u \varphi(u - y) dF_{X_1, I}(y) \quad (5.3)$$

cuya estructura recuerda a la ecuación de renovación.

**Observación 5.15.** La constante  $\varphi(0)$  puede ser evaluada, observando que  $\varphi(u) \uparrow 1$  cuando  $u \rightarrow \infty$ . Es una consecuencia de la NPC y el hecho de que  $S_n \rightarrow \infty$  casi seguramente,  $\sup_{n \geq 1} S_n < \infty$  casi seguramente por la ecuación integral de probabilidad de no ruina (5.3) y el Teorema de Convergencia monótona.

$$\begin{aligned} 1 = \lim_{u \uparrow \infty} \varphi(u) &= \varphi(0) + \frac{1}{1 + \rho} \lim_{u \uparrow \infty} \int_0^\infty I_{\{y \leq u\}} \varphi(u - y) dF_{X_1, I}(y) \\ &= \varphi(0) + \frac{1}{1 + \rho} \lim_{u \uparrow \infty} \int_0^\infty 1 dF_{X_1, I}(y) \\ &= \varphi(0) + \frac{1}{1 + \rho} \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $\varphi(0) = \rho(1 + \rho)^{-1}$ .

Ahora ya se puede realizar la demostración del Lema 5.13.

*Demostración.* Con el argumento de renovación, se tiene que

$$\psi(u) = P(\sup_{n \geq 1} R_n > u) = 1 - \varphi(u),$$

donde  $R_n$  es el camino aleatorio generado por la secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas  $(Z_n)_{n \geq 1}$  con  $Z_n = X_n - cY_n$ . Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \varphi(u) &= P(\sup_{n \geq 1} R_n \leq u) = P(R_n \leq u, \forall n \geq 1) \\ &= P(Z_1 \leq u, R_n - Z_1 \leq u - Z_1, \forall n \geq 2) \\ &= E[I_{Z_1 \leq u} P(R_n - Z_1 \leq u - Z_1, \forall n \geq 2 | Z_1)] \\ &= \int_{y=0}^{\infty} \int_{x=0}^{u+cy} P(R_n - Z_1 \leq u - (x - cy), \forall n \geq 2) dF_{X_1}(x) dF_{Y_1}(y) \\ &= \int_{y=0}^{\infty} \int_{x=0}^{u+cy} P(R_n \leq u - (x - cy), \forall n \geq 1) dF_{X_1}(x) \lambda e^{-\lambda y} dy. \end{aligned}$$

Para obtener dicho resultado se ha usado la independencia entre  $Z_1 = X_1 - cY_1$  y la secuencia  $(R_n - Z_1)_{n \geq 1}$  y que la variable  $Y_1$  tiene distribución exponencial con parámetro  $\lambda$ .

A partir de que  $\varphi(u) = P(R_n \leq u, \forall n \geq 1)$  y el resultado obtenido, se puede representar la ruina como

$$\varphi(u) = \int_{y=0}^{\infty} \int_{x=0}^{u+cy} \varphi(u - x + cy) dF_{X_1}(x) \lambda e^{-\lambda y} dy.$$

Además haciendo el cambio de variable  $z = u + cy$  se tiene que

$$\varphi(u) = \frac{\lambda}{c} e^{\frac{u\lambda}{c}} \int_{z=u}^{\infty} e^{\frac{-\lambda z}{c}} \int_{x=0}^z \varphi(z - x) dF_{X_1}(x) dz.$$

Asumiendo que  $F_{X_1}$  tiene densidad, la función

$$g(z) = \int_0^z \varphi(z - x) dF_{X_1}(x),$$

es continua. Por lo tanto, reescribimos

$$\varphi(u) = \frac{\lambda}{c} e^{\frac{u\lambda}{c}} \int_{z=u}^{\infty} e^{\frac{-\lambda z}{c}} g(z) dz.$$

Se tiene que  $\varphi$  es diferenciable. Derivándola se obtiene la ecuación integro diferencial

$$\varphi'(u) = \frac{\lambda}{c} \varphi(u) - \frac{\lambda}{c} \int_0^u \varphi(u - x) dF_{X_1}(x). \quad (5.4)$$

Se observa que la integral de la derivada es de tipo convolutivo, por lo que, posteriormente, se podrá aplicar la teoría de Renovación. Finalmente, integrando y aplicando la integral parcial

$$\begin{aligned}
\varphi(t) - \varphi(0) - \frac{\lambda}{c} \int_0^t \varphi(u) du &= -\frac{\lambda}{c} \int_0^t \int_0^u \varphi(u-x) dF_{X_1}(x) \\
&= -\frac{\lambda}{c} \int_0^t \left[ \varphi(u-x) F_{X_1}(x) \Big|_0^u + \int_0^u \varphi'(u-x) F_{X_1}(x) dx \right] du \\
&= -\frac{\lambda}{c} \int_0^t \left[ \varphi(0) F_{X_1}(u) + \int_0^u \varphi'(u-x) F_{X_1}(x) dx \right] du.
\end{aligned}$$

En la última igualdad se ha tenido en cuenta que  $F_{X_1}(0) = 0$  si  $X_1 > 0$ . Aislando las integrales de la identidad se tiene

$$\begin{aligned}
\varphi(t) - \varphi(0) &= \frac{\lambda}{c} \int_0^t \varphi(u) du - \frac{\lambda}{c} \varphi(0) \int_0^t F_{X_1}(u) du - \frac{\lambda}{c} \int_0^t F_{X_1}(x) [\varphi(t-x) - \varphi(0)] dx \\
&= \frac{\lambda}{c} \int_0^t \varphi(t-u) du - \frac{\lambda}{c} \int_0^t F_{X_1}(x) \varphi(t-x) dx \\
&= \frac{\lambda}{c} \int_0^t \bar{F}_{X_1}(x) \varphi(t-x) dx.
\end{aligned}$$

Observemos que

$$\frac{\lambda}{c} = \frac{1}{1+\rho} \frac{1}{EX_1}. \quad (5.5)$$

Por las dos últimas identidades el Lema 5.13. queda visto y por tanto se cumple

$$\varphi(u) = \varphi(0) + \frac{1}{(1+\rho)EX_1} \int_0^u \bar{F}_{X_1}(y) \varphi(u-y) dy \quad (5.6)$$

A partir de los conceptos introducidos se puede llevar a cabo la demostración del Teorema 5.11.

*Demostración.* A partir del Lema 5.13. y las observaciones 5.14. y 5.15., se puede asegurar que la no probabilidad de ruina  $\varphi$  cumple la ecuación

$$\varphi(u) = \frac{\rho}{(1+\rho)} + \frac{1}{(1+\rho)} \int_0^u \varphi(u-y) dF_{X_1,I}(y). \quad (5.7)$$

Escribiendo  $q = \frac{1}{1+\rho}$ , se puede calcular  $\psi = 1 - \varphi$  obteniendo la ecuación

$$\psi(u) = q \bar{F}_{X_1,I}(u) + \int_0^u \psi(u-x) d(qF_{X_1}(x)). \quad (5.8)$$

Observemos que tiene un aspecto muy parecido a la ecuación de renovación vista en la Proposición 3.7. apartado c) :

$$R(t) = u(t) + \int_{[0,t]} R(t-y) dF(y), \quad (5.9)$$

donde  $F$  es la función de distribución de una variable aleatoria positiva,  $u$  es una función en  $[0, \infty]$  con límite en cada intervalo finito y  $R$  es una función desconocida. Entre ambas identidades (5.8) y (5.9) hay una diferencia crucial, la primera está integrada respecto la medida  $qF_{X_1,I}(x)$ . Dicha medida no es una medida de probabilidad ya que  $\lim_{x \rightarrow \infty} (qF_{X_1,I}(x)) = q < 1$ . Por lo que (5.8) recibe el nombre de ecuación de renovación defectuosa.

Antes de aplicar la Teoría de Renovación estándar, vista en el Capítulo 3, hay que transformar la primera identidad (5.8) a la forma estándar, para alguna función de distribución  $F$ .

Llegados a este punto, se retoma el coeficiente de ajuste  $r$ . Se define la función de distribución  $F^{(r)}$  para  $x > 0$ :

$$\begin{aligned} F^{(r)}(x) &= \int_0^x e^{ry} d(qF_{X_1,I}(y)) = q \int_0^x e^{ry} dF_{X_1,I}(y) \\ &= \frac{q}{EX_1} \int_0^x e^{ry} \bar{F}_{X_1}(y) dy. \end{aligned}$$

Esta distribución recibe el nombre de transformación de Esscher o distribución exponencialmente inclinada de  $F$ . De hecho esta función de distribución de  $F^{(r)}(x)$  es no decreciente y tiene límite cuando  $x \rightarrow \infty$  dado por  $\frac{q}{EX_1} \int_0^\infty e^{ry} \bar{F}_{X_1}(y) dy = 1$ .

Para transformar la ecuación (5.8) en una del tipo de la ecuación de renovación se multiplica en ambos lados de la identidad por  $e^{ru}$ , obteniendo

$$e^{ru}\psi(u) = qe^{ru}\bar{F}_{X_1,I}(u) + \int_0^u e^{r(u-x)}\psi(u-x)e^{rx}d(qF_{X_1}(x)) \quad (5.10)$$

$$= qe^{ru}\bar{F}_{X_1,I}(u) + \int_0^u e^{r(u-x)}\psi(u-x)dF^{(r)}(x), \quad (5.11)$$

que ya es del tipo de (5.9) con  $F = F^{(r)}$ ,  $u(t) = qe^{ru}\bar{F}_{X_1,I}(t)$  y la función desconocida  $R(t) = e^{rt}\psi(t)$ , que tiene límite en intervalos finitos. Recibe el nombre de ecuación de renovación defectuosa. Usando el apartado a) del Teorema 3.9, se puede concluir que la ecuación de renovación tiene solución

$$R(t) = e^{rt}\psi(t) = \int_{[0,t]} u(t-y)dm^{(r)}(y) = q \int_{[0,t]} e^{r(t-y)}\bar{F}_{X_1,I}(t-y)dm^{(r)}(y),$$

Donde  $m^{(r)}$  es la función de renovación correspondiente al proceso de renovación, cuyos intervalos de llegada tienen en común la función de distribución  $F^{(r)}$ . En general se desconoce la función  $m^{(r)}$ . Sin embargo el apartado b) el Teorema 3.5: Renovación de Smith, da un orden asintótico de la solución de (5.8), (5.10) cuando  $u \rightarrow \infty$

$$C = \lim_{u \rightarrow \infty} e^{ru}\psi(u) = \lambda q \int_0^\infty e^{ry}\bar{F}_{X_1,I}(y)dy$$



Para aplicar el teorema anterior es necesario que  $u(t) = qe^{ru}\bar{F}_{X_1,I}(t)$  sea una integral de Riemann directa. Mediante la integración parcial y la hipótesis b) del Teorema 5.4. se tiene que

$$qe^{ru}\bar{F}_{X_1,I}(u) = \int_u^\infty e^{rx}d(qF_{X_1,I}(x)) - r \int_u^\infty q\bar{F}_{X_1,I}(x)e^{rx}dx$$

que es la diferencia entre dos Integrales de Riemann. Por lo tanto,  $u(t)$  es Integrable Riemann. Además,

$$\int_0^\infty qe^{ru}\bar{F}_{X_1,I}(u)du = q\frac{1 - \hat{f}_1(-r)}{-r} = \frac{\rho}{r(1 + \rho)} < \infty,$$

Por la hipótesis b) del Teorema 5.4. se tiene que

$$\int_0^\infty xdF_{X_1,I,r}(x) = \frac{1}{\mu(1 + \rho)} \int_0^\infty xe^{rx}\bar{F}(x)dx < \infty$$

Ya se ha visto que se puede aplicar el apartado b) del Teorema 3.9 y por tanto se tiene que

$$C = \left[ \frac{r}{\rho EX_1} \int_0^\infty xe^{rx}\bar{F}_{X_1}(x)dx \right]^{-1} \quad (5.12)$$

Se da por finalizada la demostración del límite de la ruina del teorema de Cramér. Además, queda demostrado el apartado b) del Teorema 5.4.

**Corolario 5.16.** *A partir de la demostración del teorema anterior, se puede demostrar el apartado c) del Teorema 5.4., es decir, que para el caso en que el coste de los siniestros se distribuya mediante una exponencial, la probabilidad de ruina no depende del parámetro del número de siniestros  $\lambda$ .*

*Demostración.* Teniendo las siguientes hipótesis:

$$\begin{aligned} X &\sim \text{Exp}(1/\mu) \rightarrow EX = \mu. \\ N &\sim \text{Pois}(\lambda). \end{aligned}$$

Y partiendo de la derivada de la función de no-ruina (5.4), se puede calcular la segunda derivada, que es la siguiente:

$$\varphi''(u) = \left( \frac{\lambda}{c} - \frac{1}{\mu} \right) \varphi'(u).$$

Por lo tanto, como es una ecuación diferencial homogénea de segundo orden tendrá un resultado del siguiente tipo,  $\varphi(u) = a + be^{-\frac{\rho}{\mu(1+\rho)}u}$ . Sabemos que  $\varphi(0) = \frac{\rho}{1+\rho}$  y que  $\varphi(\infty) = 1$ . Entonces los valores de  $a$  y  $b$  se pueden calcular, y se tiene  $a = 1$  y  $b = -\frac{\lambda\mu}{c}$ . Por todo esto,

$$\psi(u) = \frac{1}{1 + \rho} e^{-\frac{\rho}{\mu(1+\rho)}u} \quad (5.13)$$

Que es exactamente (5.2). Así pues, queda visto el apartado c) del Teorema 5.4..

## 6. LA REPRESENTACIÓN DE LA PROBABILIDAD DE RUINA COMO UNA PROBABILIDAD GEOMÉTRICA COMPUESTA

En este apartado se seguirá T. Mikosch [1] páginas 176-177. Suponiendo el modelo de Cramér-Lundberg Clásico con la NPC y teniendo en cuenta las demostraciones anteriores.

En concordancia con el Lema 5.13 del apartado anterior, para validar la ecuación solo se necesita que los tamaños de reclamación  $X_i$  tengan densidad con esperanza finita y que se mantenga la NPC.

En esta sección se estudiará la ecuación (5.6) con más detalle. En primer lugar, se interpretará el lado derecho de la igualdad, como la función de distribución de la suma geométrica compuesta. Que está desarrollada en T. Mikosch [1] página 117.

**Definición 6.1.** *Consideremos una variable aleatoria  $M$  con distribución geométrica,*

$$p_n = P(M = n) = pq^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad \text{para alguna } p = 1 - q \in (0, 1).$$

*La suma aleatoria  $S_M = \sum_{i=1}^M X_i$  tiene distribución geométrica compuesta, dadas  $M$  y la secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas  $(X_i)$ . La función de distribución se expresa:*

$$P(S_M \leq x) = p_0 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n P(X_1 + \dots + X_n \leq x) = p + p \sum_{n=1}^{\infty} q^n P(X_1 + \dots + X_n \leq x).$$

*Se introducen las siguientes funciones:*

$$\mathcal{G} = \{G : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty), \text{ ND, L, AC, } G(x) = 0 \forall x < 0\},$$

*donde ND, L, AC significa no decreciente, con límite y absolutamente continuas. Es decir,  $G \in \mathcal{G}$ , si y solo si,  $G(x) = 0$  para  $x < 0$  y existe  $c \geq 0$ , y una función de distribución  $F$  de un valor aleatorio no negativo tal que  $G(x) = cF(x) \forall x \geq 0$ .*

**Proposición 6.2.** *REPRESENTACIÓN DE LA PROBABILIDAD DE NO RUINA CON UNA SUMA GEOMÉTRICA COMPUESTA*

*Suponemos el modelo de Cramér-Lundberg Clásico con  $EX_1 < \infty$  y la NPC, que los tamaños de reclamación  $X_i$  tienen densidad y  $(X_{I,n})$  una secuencia de variables aleatorias idénticamente distribuidas con función de distribución  $F_{X_i, I}$ . Entonces, la función  $\varphi$  dada por*

$$\varphi(u) = \left[ \frac{\rho}{1 + \rho} \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (1 + \rho)^{-n} P(X_{I,1} + \dots + X_{I,n} \leq u) \right] \right], u > 0 \quad (6.1)$$

*cumple la derivación del resultado fundamental de Cramér pero además es la única función que lo cumple de la clase  $\mathcal{G}$ .*

La identidad resultará útil para algunos casos especiales. Además, la probabilidad de no ruina  $\varphi$  puede ser interpretada como la función de distribución de una suma geométrica compuesta con sumas de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas  $X_{I,1}$  y  $q = \frac{1}{1+\rho}$ .

*Demostración.* Se empieza viendo que (5.14) cumple

$$\varphi(u) = \frac{1}{(1+\rho)} + \frac{1}{(1+\rho)} \int_0^u \varphi(u-y) dF_{X_{1,I}}(y) \quad (6.2)$$

Se escribe,  $q = \frac{1}{(1+\rho)}$  y  $p = 1 - q = \frac{\rho}{(1+\rho)}$ . Entonces,

$$\begin{aligned} \varphi(u) &= p + qp \left[ F_{X_{1,I}}(u) + \sum_{n=2}^{\infty} q^{n-1} \int_0^u P(y + X_{I,2} + \cdots + X_{I,n} \leq u) dF_{X_{1,I}}(y) \right] \\ &= p + q \int_0^u p \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} q^n P(X_{I,1} + \cdots + X_{I,n} \leq u - y) \right] dF_{X_{1,I}}(y) \\ &= p + q \int_0^u \varphi(u-y) dF_{X_{1,I}}(y). \end{aligned}$$

Para ver, que en particular es la única de la clase  $\mathcal{G}$  se usan las transformaciones de Laplace-Stieltjes, ver la Definición 5.1. Para  $G \in \mathcal{G}$  la transformación de Laplace-Stieltjes viene dada por

$$\hat{g}(t) = \int_{[0,\infty)} e^{-tx} dG(x), \quad t \geq 0.$$

A partir del Teorema 5.3., se ve la unicidad. Por tanto, la probabilidad de no ruina (6.1) es la única solución de la clase  $\mathcal{G}$  de (6.2).

## 7. TAMAÑOS DE RECLAMACIÓN GRANDES

Este último apartado teórico se basa en los tamaños de reclamación grandes. Para desarrollar este apartado se sigue las páginas 105-111 y 179-181 T. Mikosch [1] y las páginas 36-48 y 564-582 de P. Embrechts, C. Klüppelberg y T. Mikosch [2]. Partiendo del modelo clásico de Cramér-Lundberg y la NPC, se ha visto que el límite de Cramér para la probabilidad de ruina cumple

$$\psi(u) = Ce^{-ru}(1 + o(1)), \quad u \rightarrow \infty.$$

El Teorema 5.8. se ha demostrado bajo la condición de tamaño de reclamación pequeño. Por lo que en este capítulo se estudiará que ocurre cuando los tamaños de reclamación son grandes. Vemos a continuación que las funciones subexponenciales dan modelos adecuados para tamaños grandes de reclamación.

Se inicia la discusión con la propiedad de clausura de convolución para una función de distribución de variación regular.

### 7.1. VARIACIÓN REGULAR DE LOS TAMAÑOS DE RECLAMACIÓN Y SUS AGREGADOS

Las distribuciones de colas pesadas se pueden escribir como

$$\bar{F}(x) = 1 - F(x) = \frac{L(x)}{x^\alpha}, x > 0,$$

para alguna constante  $\alpha > 0$ .

**Definición 7.1.** Una función positiva y medible Lebesgue  $L(x)$  en  $(0, \infty)$  es de variación lenta en  $\infty$  (escribiendo  $L \in \mathcal{R}_0$ ) si

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{L(cx)}{L(x)} = 1 \quad \forall c > 0. \quad (7.1)$$

Toda función de variación lenta se puede representar como

$$L(x) = c_0(x) \exp \left\{ \int_{x_0}^x \frac{\varepsilon(t)}{t} dt \right\}, \text{ para } x \geq x_0, \text{ algún } x_0 > 0, \quad (7.2)$$

donde  $\varepsilon(t) \rightarrow 0$  si  $t \rightarrow \infty$  y  $c_0(t)$  es una función positiva que cumple que  $c_0(t) \rightarrow c_0$  para alguna constante positiva  $c_0$ . Usando la representación (7.2) se puede demostrar que  $\forall \delta > 0$ ,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{L(c)}{x^\delta} = 0 \text{ y } \lim_{x \rightarrow \infty} x^\delta L(x) = \infty, \quad (7.3)$$

y equivalentemente  $L$  es pequeña en comparación con cualquier función  $x^\delta$ .

**Definición 7.2.** Sea  $L$  una función de variación lenta en el sentido de (7.1)

1. Para algún  $\delta \in \mathbb{R}$ , se tiene

$$f(x) = x^\delta L(x), \quad x > 0,$$

se dice que  $f$  tiene variación regular con índice  $\delta$ .

2. Una variable aleatoria  $X$  y su función de distribución se dice que son de variación regular con (cola) índice  $\alpha \geq 0$ , si la cola derecha de la distribución se representa como

$$P(X > x) = L(x)x^{-\alpha}, \quad x > 0.$$

Se tiene también la siguiente definición alternativa.

**Definición 7.3.** Sea  $h$  una función positiva y medible de Lebesgue en  $(0, \infty)$  tiene variación regular en  $\infty$  con índice  $\alpha \in \mathbb{R}$  (escribiendo  $r \in \mathcal{R}_\alpha$ ) si

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{h(tx)}{h(x)} = t^\alpha, \quad t > 0.$$

**Lema 7.4.** CLAUSURA DE CONVOLUCIÓN DE LA FUNCIONES DE DISTRIBUCIÓN CON COLAS DE VARIACIÓN REGULAR

Sean  $F_1, F_2$  funciones de distribución tales que  $\bar{F}_i(x) = x^\alpha L_i(x)$ ,  $x > 0$  y  $L_i \in \mathcal{R}_0$ ,  $i = 1, 2$ .

La convolución  $G = F_1 * F_2$  tiene una cola con variación regular de manera que

$$\bar{G}(x) \sim x^{-\alpha}(L_1(x) + L_2(x)), \quad x \rightarrow \infty.$$

*Demostración.* Sean  $X_1, X_2$  variables aleatorias independientes con funciones de distribución  $F_1$  y  $F_2$ . Usando  $\{X_1 + X_2 > x\} \supset \{X_1 > x\} \cup \{X_2 > x\}$ , es sencillo ver que

$$\bar{G}(x) \geq (\bar{F}_1(x) + \bar{F}_2(x))(1 - o(1)).$$

Si  $0 < \delta < 1/2$ , entonces de

$$\{X_1 + X_2 > x\} \subset \{X_1 > (1 - \delta)x\} \cup \{X_2 > (1 - \delta)x\} \cup \{X_1 > \delta x, X_2 > \delta x\},$$

sigue

$$\begin{aligned} G(x) &\leq \bar{F}_1((1 - \delta)x) + \bar{F}_2((1 - \delta)x) + \bar{F}_1(\delta x)\bar{F}_2(\delta x) \\ &= (\bar{F}_1((1 - \delta)x) + \bar{F}_2((1 - \delta)x))(1 + o(1)). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$1 \leq \liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{G}(x)}{\bar{F}_1(x) + \bar{F}_2(x)} \leq \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{G}(x)}{\bar{F}_1(x) + \bar{F}_2(x)} \leq (1 - \delta)^{-\alpha},$$

el resultado se establece dejando  $\delta \downarrow 0$ .

A partir de este Lema 7.4. es sencillo de ver para la suma  $G = F_1 + F_2$ :

**Lema 7.5.** *Sean  $X_1$  y  $X_2$  variables aleatorias de variación regular con el mismo índice  $\alpha > 0$ . Equivalentemente*

$$\overline{F}_i(x) = P(X_i > x) = \frac{L_i(x)}{x^\alpha}, \quad x > 0.$$

para posibles funciones que varían lentamente  $L_i$ . Entonces  $X_1 + X_2$  es de variación regular con el mismo índice. Con más precisión, si  $x \rightarrow \infty$ ,

$$\begin{aligned} P(X_1 + X_2 > x) &= [P(X_1 > x) + P(X_2 > x)](1 + o(1)) \\ &= x^{-\alpha}[L_1(x) + L_2(x)](1 + o(1)). \end{aligned}$$

Mediante inducción sobre  $n$  surge el siguiente corolario.

**Corolario 7.6.** *Supongamos que  $X_1, \dots, X_n$  son  $n$  variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con variación regular con índice  $\alpha > 0$  y función de distribución  $F$ . Entonces  $S_n$  tiene variación regular con índice  $n$ , y*

$$P(S_n > x) = n\overline{F}(x)(1 + o(1)), \quad x \rightarrow \infty.$$

*Demostración.* La demostración es consecuencia de la inducción sobre el Lema 7.5.

Supongamos que  $X_1, \dots, X_n$  son iid con función de distribución  $F$ , en el corolario anterior. Sea  $S_n$  la suma parcial y el máximo parcial  $M_n = \max(X_1, \dots, X_n)$ . Entonces para  $n \geq 2$  cuando  $x \rightarrow \infty$ ,

$$\begin{aligned} P(S_n > x) &= \overline{F^{*n}}(x), \\ P(M_n > x) &= \overline{F^n}(x) = \overline{F}(x) \sum_{k=0}^{n-1} F^k(x) = n\overline{F}(x)(1 + o(1)). \end{aligned}$$

Así pues, con la notación anterior el Corolario 7.6. se puede reescribir como:

Si  $X_i$  tiene variación regular con índice  $\alpha > 0$  entonces

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(S_n > x)}{P(M_n > x)} = 1, \quad \text{para } n \geq 2.$$

Lo que implica que, para distribuciones con colas con variación regular, la cola de la distribución de la suma  $S_n$  está determinada esencialmente por la cola de la distribución del máximo  $M_n$ . Este hecho es una de las nociones intuitivas de las colas pesadas o las distribuciones de grandes reclamos. De manera informal se puede decir que bajo hipótesis de variación regular, la cola de la distribución del tamaño máximo de reclamo determina la cola de la distribución del tamaño de reclamo agregado.

**Teorema 7.7.** *LA PROBABILIDAD DE RUINA CUANDO LA DISTRIBUCIÓN DEL TAMAÑO DE LAS RECLAMACIONES ACUMULADAS ES SUBEXPONENCIAL*

Supongamos el modelo Clásico de Cramér-Lundberg con  $EX_1 < \infty$  y la NPC. Se supone además que los tamaños de reclamación  $X_i$  tienen densidad y que el tamaño de las reclamaciones acumuladas  $F_{X_1,I}$  es subexponencial. Entonces, la probabilidad de ruina  $\psi(u)$  satisface la siguiente relación asintótica

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\psi(u)}{\bar{F}_{X_1,I}(u)} = \rho^{-1}.$$

*Demostración.* La clave está en la representación de la probabilidad de no ruina  $\varphi = 1 - \psi$  como una distribución geométrica compuesta vista en el punto 6 de este trabajo. Sea

$$\frac{\psi(u)}{\bar{F}_{X_1,I}(u)} = \frac{\rho}{1 + \rho} \sum_{n=1}^{\infty} (1 + \rho)^{-n} \frac{P(X_{I,1} + \cdots + X_{I,n} > u)}{\bar{F}_{X_1,I}(u)} \quad (7.4)$$

Por la subexponencialidad de  $\bar{F}_{X_1,I}$ ,

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\rho}{1 + \rho} \sum_{n=1}^{\infty} (1 + \rho)^{-n} \frac{P(X_{I,1} + \cdots + X_{I,n} > u)}{\bar{F}_{X_1,I}(u)} = n, n \geq 1.$$

Por tanto, intercambiando el límite de  $u \rightarrow \infty$  y la serie infinita  $\sum_{n=1}^{\infty}$ , que se puede hacer por la convergencia dominada de Lebesgue, se consigue la relación deseada,

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\rho}{1 + \rho} \sum_{n=1}^{\infty} (1 + \rho)^{-n} n = \rho^{-1}. \quad (7.5)$$

## 7.2. TEORÍA DE CRAMÉR-LUNDBERG PARA DISTRIBUCIONES SUBEXPONENCIALES

### 7.2.1. DISTRIBUCIONES SUBEXPONENCIALES

Se sabe que para variables aleatorias iid que varían regularmente  $X_1, X_2, \dots$  con índice positivo  $\alpha$  la cola de la suma  $S_n = X_1 + \cdots + X_n$  está esencialmente determinada por la cola del máximo  $M_n = \max_{i=1, \dots, n} X_i$ .

**Definición 7.8.** *La variable aleatoria  $X$  y su distribución se dice que son subexponenciales si para la secuencia  $(X_i)$  de variables aleatoria iid con la misma distribución que  $X$  la siguiente relación sostiene*

$$\forall n \geq 2 : P(S_n > x) = P(M_n > x)(1 + o(1)), \text{ cuando } x \rightarrow \infty. \quad (7.6)$$

La clase de las distribuciones subexponenciales se denotan  $\mathcal{S}$ .

Por lo visto en el apartado 7.1, se puede reescribir (7.6) como

$$\forall n \geq 2 : \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(S_n > x)}{\overline{F}(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F}^{*n}}{\overline{F}(x)} = n. \quad (7.7)$$

El siguiente lema es crucial para pasar de (7.4) a (7.5) por la subexponencialidad de  $F_I$ .

**Lema 7.9.** *PROPIEDADES BÁSICAS DE LAS DISTRIBUCIONES SUBEXPONENCIALES*

1. Si  $F \in \mathcal{S}$ , para cada  $y > 0$ ,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F}(x - y)}{\overline{F}(x)} = 1. \quad (7.8)$$

2. Si (5.5) se da,  $\forall \varepsilon > 0$ ,

$$e^{\varepsilon x} \overline{F}(x) \rightarrow \infty, \quad x \rightarrow \infty.$$

3. Si  $F \in \mathcal{S}$  entonces, dada  $\varepsilon > 0$ , existe una constante finita  $K$ , tal que  $\forall n \geq 2$ ,

$$\frac{\overline{F}^{*n}(x)}{\overline{F}(x)} \leq K(1 + \varepsilon)^n, \quad x \geq 0. \quad (7.9)$$

*Demostración.* Veamos la demostración de cada una de las propiedades:

1. Sea  $G(x) = P(X_1 + X_2 \geq x)$ . Para  $x \geq y > 0$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\overline{G}(x)}{\overline{F}(x)} &= 1 + \int_0^y \frac{\overline{F}(x - t)}{\overline{F}(x)} dF(t) + \int_y^x \frac{\overline{F}(x - t)}{\overline{F}(x)} dF(t) \\ &\geq 1 + F(y) + \frac{\overline{F}(x - y)}{\overline{F}(x)} (F(x) - F(y)). \end{aligned}$$

Así, si  $x$  es suficientemente grande como para que  $F(x) - F(y) \neq 0$ ,

$$1 \leq \frac{\overline{F}(x - y)}{\overline{F}(x)} \leq \left( \frac{\overline{G}(x)}{\overline{F}(x)} - 1 - F(y) \right) (F(x) - F(y))^{-1}.$$

En la última estimación la parte derecha tiende a 1 si  $x \rightarrow \infty$ . Con esto queda probado (7.8).

2. A partir del apartado anterior, la función  $\overline{F}(\log(y))$  varía lentamente. Pero la conclusión de que  $y^\varepsilon \overline{F}(\log(y)) \rightarrow \infty$  cuando  $y \rightarrow \infty$  que sigue inmediatamente del Teorema de representación para funciones que varían lentamente. Ver (7.3).



3. Dada  $\alpha_n = \sup_{x \geq 0} \overline{F^{*n}}(x)/\overline{F}(x)$  y utilizando (7.10) se obtiene, para cada  $T < \infty$ ,

$$\begin{aligned} \alpha_{n+1} &\leq 1 + \sup_{0 \leq x \leq T} \int_0^x \frac{\overline{F^{*n}}(x-y)}{\overline{F}(x)} dF(y) \\ &\quad + \sup_{x \geq T} \int_0^x \frac{\overline{F^{*n}}(x-y)}{\overline{F}(x-y)} \frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)} dF(y) \\ &\leq 1 + A_T + \alpha_n \sup_{x \geq T} \frac{F(x) - F^{*2}(x)}{\overline{F}(x)}, \end{aligned}$$

donde  $A_T = (\overline{F}(T))^{-1} < \infty$ . Como  $F \in \mathcal{S}$ , dado algún  $\varepsilon > 0$ , eligiendo  $T$  tal que

$$\alpha_{n+1} \leq 1 + A_T + \alpha_n(1 + \varepsilon).$$

Por lo tanto,

$$\alpha_n \leq (1 + A_T)\varepsilon^{-1}(1 + \varepsilon)^n.$$

Que implica (7.9).

**Lema 7.10.** *CONDICIONES SUFICIENTES PARA QUE  $F_I \in \mathcal{S}$*

$$\text{Si } \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F^{*2}}(x)}{\overline{F}(x)} \leq 2, \text{ entonces } F \in \mathcal{S}.$$

*Demostración.* Sea  $F$  una función de distribución de una variable aleatoria positiva, entonces  $F^{*2} \leq F^2$  y equivalentemente  $\overline{F^{*2}}(x) \geq \overline{F^2}(x) \geq 0$ . Por lo tanto,  $\liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F^{*2}}(x)}{\overline{F}(x)} \geq 2$ . Debido a las condiciones del lema se mantiene la relación (7.7) para  $n = 2$ . La demostración se debe hacer por inducción en  $n$ .

Sea  $x \geq y > 0$ ,

$$\frac{\overline{F^{*(n+1)}}(x)}{\overline{F}(x)} = 1 + \frac{F(x) - F^{*(n+1)}(x)}{\overline{F}(x)} \quad (7.10)$$

$$= 1 + \int_0^x \frac{\overline{F^{*n}}(x-t)}{\overline{F}(x)} dF(t) \quad (7.11)$$

$$= 1 + \left( \int_0^{x-y} + \int_{x-y}^x \right) \left( \frac{\overline{F^{*n}}(x-t)}{\overline{F}(x-t)} \frac{\overline{F}(x-t)}{\overline{F}(x)} \right) dF(t) \quad (7.12)$$

$$= 1 + I_1(x) + I_2(x). \quad (7.13)$$

Poniendo  $-n + n$  en  $I_1$  y notando que  $(\overline{F^{*n}}(x-t)/\overline{F}(x-t) - n)$  puede ser arbitrariamente pequeño para  $0 \leq t \leq x-y$  e  $y$  suficientemente grande, se tiene que

$$I_1(x) = (n + o(1)) \int_0^{x-y} \frac{\overline{F}(x-t)}{\overline{F}(x)} dF(t)$$

Ahora,

$$\begin{aligned}
\int_0^{x-y} \frac{\overline{F}(x-t)}{\overline{F}(x)} dF(t) &= \frac{F(x) - F^{*2}(x)}{\overline{F}(x)} - \int_{x-y}^x \frac{\overline{F}(x-t)}{\overline{F}(x)} dF(t) \\
&= \frac{F(x) - F^{*2}(x)}{\overline{F}(x)} - J(x, y) \\
&= (1 + o(1)) - J(x, y),
\end{aligned}$$

donde  $J(x, y) \leq (F(x) - F(x-y))/\overline{F}(x) \rightarrow 0$  cuando  $x \rightarrow \infty$  por el Lema 7.9 1) que es está a continuación. Así pues  $\lim_{x \rightarrow \infty} I_1(x) = n$ .

Finalmente, como  $\overline{F^{*n}}(x-t)/\overline{F}(x-t)$  está limitado por  $x-y \leq t \leq x$  y  $\lim_{x \rightarrow \infty} J(x, y) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} I_2(x) = 0$ .

1. La condición del Lema 7.10. es necesaria para que  $F \in \mathcal{S}$ .
2. A partir de que  $\liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F^{*2}}(x)}{\overline{F}(x)} \geq 2$ , se ve fácilmente que en este caso  $\forall n \geq 2$ ,

$$\liminf_{x \rightarrow \infty} \overline{F^{*n}}(x)/\overline{F}(x) \geq n.$$

De hecho,  $S_n \geq M_n$ , entonces  $\overline{F^{*n}}(x) = P(S_n > x) \geq P(M_n > x) = \overline{F^n}(x)$ . Por lo tanto,

$$\liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F^{*n}}(x)}{\overline{F}(x)} \geq \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F^n}(x)}{\overline{F}(x)} = n.$$

**Teorema 7.11.** *EL TEOREMA DE CRAMÉR- LUNDBERG PARA GRANDES RECLAMOS, I*

*Considerando el modelo de Cramér-Lundberg con la NPC  $\rho > 0$  y  $F_I \in \mathcal{S}$ , entonces*

$$\psi(u) \sim \rho^{-1} \overline{F}_I(u), \quad u \rightarrow \infty. \quad (7.14)$$

*Este teorema coincide con el Teorema 7.7. que ya se ha demostrado, de todos modos veamos una demostración distinta.*

*Demostración.* Como  $(1 + \rho)^{-1} < 1$ , existe en  $\varepsilon > 0$  tal que  $(1 + \rho)^{-1}(1 + \varepsilon) < 1$ . Entonces por (7.9),

$$(1 + \rho)^{-n} \frac{\overline{F}_I^{*n}(u)}{\overline{F}_I(u)} \leq (1 + \rho)^{-n} K(1 + \varepsilon)^n, \quad u \geq 0,$$

que permite por convergencia dominada de Lebesgue el cambio entre el límite y la suma en (7.4), dejando el resultado deseado.

**Corolario 7.12.** *Para los tamaños de reclamación con distribución de la cola integrada subexponencial, la ruina  $\psi(u)$  viene dada por (7.14).*

**Teorema 7.13.** *EL TEOREMA DE CRAMÉR-LUNDBERG PARA GRANDES RECLAMOS, II*

Bajo el modelo Clásico de Cramér-Lundberg con la NPC  $\rho > 0$ , los siguientes puntos son equivalentes

- (a)  $F_I \in \mathcal{S}$ ,
- (b)  $1 - \psi(u) \in \mathcal{S}$ ,
- (c)  $\lim_{u \rightarrow \infty} \psi(u)/F_I(u) = \rho^{-1}$ .

Consecuentemente, la estimación (7.14) solo es posible bajo la condición  $F_i \in \mathcal{S}$ . En el caso de la teoría de Cramér-Lundberg,  $\mathcal{S}$  es la clase natural cuando se trata de estimaciones de ruina que quebrantan la hipótesis (5.1) del Teorema de Cramér-Lundberg para reclamos pequeños.

### 7.3. SUMA TOTAL DEL RECLAMO EN EL CASO SUBEXPONENCIAL

Se ha visto que para el modelo Clásico de Cramér-Lundberg,  $\forall t \geq 0$ ,

$$G_t(x) = P(S(t) \leq x) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} F^{*n}(x), \quad x \geq 0, \quad (7.15)$$

donde  $S(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} X_k$  es la suma total del reclamo hasta el tiempo  $t$ . El proceso de llegada de reclamación  $(N(t))_{t \geq 0}$  en (7.15) es un Proceso homogéneo de Poisson con intensidad  $\lambda > 0$ , entonces

$$P(N(t) = n) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}, \quad n \geq 0. \quad (7.16)$$

El mismo cálculo de (7.15) para un proceso de general de llegada de reclamaciones (asumiendo independencia) da la fórmula

$$G_t(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_t(n) F^{*n}(x), \quad x \geq 0, \quad (7.17)$$

donde

$$p_t(n) = P(N(t) = n), \quad n \in \mathbb{N}_0$$

define una medida de probabilidad  $\mathbb{N}_0$ , el conjunto de los naturales incluyendo 0.

**Teorema 7.14.** *SUMA TOTAL DEL RECLAMO EN EL CASO SUBEXPONENCIAL*

Considerando (7.17) con  $F \in \mathcal{S}$ , fijando  $t > 0$ , y suponiendo que  $p_t(n)$  satisface

$$\sum_{n=0}^{\infty} (1 + \varepsilon)^n p_t(n) < \infty \quad (7.18)$$

para algunos  $\varepsilon > 0$ . Entonces  $G_t \in \mathcal{S}$  y

$$\overline{G}_t(x) \sim EN(t) \overline{F}(x), \quad x \rightarrow \infty. \quad (7.19)$$

## 8. APLICACIONES DE LA TEORÍA DE LA RUINA

Siguiendo los apartados anteriores, se obtendrán resultados para diferentes distribuciones del coste del siniestro. Para cada función de distribución se estudia como se ve afectada la probabilidad de ruina variando el capital inicial o el recargo de seguridad. También mediante el programa R, se simulan valores para el número de siniestros y su importe en un tiempo finito 1, contabilizando la probabilidad de ruina. El valor  $t = 1$  se justifica por las consideraciones de la Ley de Solvencia II, que se pueden ver en [6] de A. Castanñer y M. Claramunt.

En el siguiente cuadro describimos las funciones de distribución que se utilizarán, la información contenida se puede ver en H. Panjer y G. Willmot [3] páginas 101 y 111. Además se estudia una tercera función de distribución: La mixta de exponenciales, cuyas magnitudes se desarrollan en el apartado 8.3.1.

Descripción	$Exp(\beta)$	$Ga(\alpha, \beta)$
Función de densidad $f(x)$	$\beta e^{-\beta x}$	$\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}$ $x, \alpha, \beta > 0$
Función de distribución $F(x)$	$1 - e^{-\beta x}$	$Ga(x; \alpha, \beta)$
Distribución de la cola $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$	$e^{-\beta x}$	$1 - Ga(x; \alpha, \beta)$
F.G.M. $M_X(z)$	$\frac{\beta}{\beta - z}$	$(\frac{\beta}{\beta - z})^\alpha$
$E[X]$	$1/\beta$	$\alpha/\beta$
$V[X]$	$1/\beta^2$	$\alpha/\beta^2$

Cuadro 1: Características de las funciones de distribución que se utilizarán.

**Observación 8.1.** La siguiente relación  $Ga(1, \beta) = Exp(\beta)$  es evidente.

Los tres primeros puntos se realizan para tamaños de reclamación pequeños y tiempo infinito.

### 8.1. CASO EXPONENCIAL

En esta sección se estudia la probabilidad de ruina cuando los importes de los siniestros se distribuyen mediante una Exponencial. Para ello se plantean distintos supuestos que harán que el comportamiento de la probabilidad de ruina varíe. En primer lugar es necesario introducir ciertos resultados de la distribución exponencial.

### 8.1.1. RESULTADOS PREVIOS PARA LA DISTRIBUCIÓN EXPONENCIAL

La distribución Exponencial cumple ciertas características interesantes de ver, por lo que a continuación se estudia la inecuación de Lundberg y la no dependencia del parámetro de la distribución del número de siniestros para esta función concreta.

Veamos en primer lugar la inecuación de Lundberg, considerando el modelo de Cramér-Lundberg con los costes de los siniestros siguiendo una exponencial  $Exp(\frac{1}{\mu})$  y el número de siniestros una Poisson de parámetro  $\lambda$ . Entonces los tiempos entre ocurrencias  $Y_i$  son variables aleatorias distribuidas mediante una exponencial  $Exp(\lambda)$ .

La función generatriz de momentos de una  $Exp(a)$  de una variable aleatoria  $A$  viene dada por

$$M_A(h) = \frac{a}{a-h}, \quad h < a.$$

Por lo que la función generatriz de momentos de  $Z_1 = X_1 - cY_1$  es

$$M_{Z_1}(h) = M_{X_1}(h)M_{cY_1}(-h) = \frac{1/\mu}{1/\mu-h} \frac{\lambda}{\lambda+ch}, \quad -\lambda/c < h < 1/\mu.$$

El coeficiente de ajuste es la solución de la ecuación

$$1 + h \frac{c}{\lambda} = \frac{1/\mu}{1/\mu-h} = \frac{1}{1-hEX_1}, \quad (8.1)$$

ya que  $EX_1 = \mu$ . Se puede expresar la NPC

$$\frac{EX_1}{EY_1} = \mu\lambda < c$$

Bajo esta condición, se ve que la única solución para (8.1) es

$$r = \frac{1}{\mu} - \frac{\lambda}{c} > 0. \quad (8.2)$$

Por el Corolario 2.21. se puede expresar  $c$  como (2.7):

$$c = \frac{EX_1}{EY_1}(1+\rho) = \lambda\mu(1+\rho). \quad (8.3)$$

Usando conjuntamente (8.2) y (8.3) se obtiene

$$r = \frac{1}{\mu} \frac{\rho}{1+\rho} \quad (8.4)$$

**Corolario 8.2.** *A partir del cálculo anterior se tiene que con las condiciones anteriores la inecuación de Lundberg es*

$$\psi(u) \leq \exp \left\{ -\frac{1}{\mu} \frac{\rho}{1+\rho} u \right\}, \quad u > 0. \quad (8.5)$$

En el Teorema 5.4. el apartado  $c$  da un valor exacto para  $\varphi(u)$  que no depende de  $\lambda$ .

$$\psi(u) = \frac{1}{1+\rho} e^{-ru} \quad (8.6)$$

De hecho a partir de lo anterior se puede ver la igualdad mediante otra metodología en la página 171 de T. Mikosch [1].

A partir de todo lo que se ha visto, ya se puede empezar a ver como varía la probabilidad de ruina en función de los distintos parámetros.

### 8.1.2. VARIACIÓN DEL CAPITAL INICIAL

En primer lugar se variará el valor de  $u$  para ver como se ve afectada la probabilidad de ruina. Para realizar la aplicación se debe dar valores a los parámetros, excepto al capital inicial, para ver como se comporta la probabilidad de ruina manteniendo el recargo de seguridad en el 10 %. Así pues comencemos con:  $\lambda = 1$ ,  $\mu = 100$  y  $\rho = 0,1$ . Por lo que se tiene:

$$\begin{aligned} X &\sim \text{Exp}(1/\mu) \rightarrow X \sim \text{Exp}(1/100). \\ N(t) &\sim \text{Pois}(\lambda) \rightarrow N(t) \sim \text{Pois}(1). \\ Y &\sim \text{Exp}(\lambda) \rightarrow Y \sim \text{Exp}(1). \end{aligned}$$

Además con estas hipótesis se tiene que:

$$\begin{aligned} c &= \lambda\mu(1+\rho) = 1 * 100 * (1+0,1) = 110. \\ r &= \frac{1}{\mu} \frac{\rho}{1+\rho} \rightarrow r = \frac{1}{1100} = 0,00091. \end{aligned}$$

Se resume lo anterior en la siguiente tabla:

Parámetro	Valor
$\lambda$	1
$\mu$	100
$\rho$	0,1
$c$	110
$r$	$\frac{1}{1100}$

Cuadro 2: Hipótesis de la aplicación con la exponencial con variación de  $u$ .

Por el punto 8.1. de este mismo apartado, se sabe que la ruina, cuando el coste de los siniestros sigue una exponencial de parámetro  $1/\mu$  se puede expresar como (8.6) y la inecuación de Lundberg sigue la desigualdad (8.5). Por lo tanto, a partir de una

programa en C, que está contenido en el Anexo 10.2.1, se obtienen los resultados para la probabilidad de ruina, la cota de Lundberg y su diferencia. La tabla que contiene dichos resultados se encuentra en el Anexo 10.1.1.

En primer lugar se observa que evidentemente para cualquier valor de  $u$ , el resultado exacto es menor que la estimación por la cota de Lundberg. En segundo lugar se observa que a medida que el valor de  $u$  crece, el error del estimador de Lundberg disminuye, es evidente porque las dos ecuaciones tienden a 0 cuando  $u \rightarrow \infty$ . Por tanto, se tiene que a mayor capital inicial, menor es la probabilidad de ruina y más se ajusta el coeficiente de Lundberg al valor real.

### 8.1.3. VARIACIÓN DEL RECARGO DE SEGURIDAD

En este caso se variará el recargo de seguridad entre el 0 y el 100 % para ver como oscila la probabilidad de ruina. Notemos que el hecho de variar el recargo de seguridad hará cambiar en cada valor de este el valor de  $c$  y  $r$ . Mantengamos las hipótesis del caso anterior, excepto  $\rho$ , y añadamos un valor para  $u$ , la tabla resumen es la siguiente:

Parámetro	Valor
$\lambda$	1
$\mu$	100
$u$	10000

Cuadro 3: Hipótesis de la aplicación de la exponencial con variación de  $c$ .

Por tanto, una vez se tienen las hipótesis de la aplicación práctica, mediante el programa en C del Anexo 10.2.1 se obtienen los valores para  $c$ ,  $r$ , la probabilidad de ruina, la inecuación de Lundberg y la variación de las dos últimas. Las tabla con los valores se encuentra en el Anexo 10.1.2.

Destacamos de la tabla anterior que para un recargo de seguridad nulo, los ingresos por primas coinciden con el producto de  $\lambda\mu$  y para ese mismo caso  $r$  tiene valor 0, por lo que la probabilidad de ruina es exactamente 1. Este primer caso se quiere evitar a toda costa, pero es evidente que si no hay recargo de seguridad la compañía concurrirá en ruina.

A medida que se aumenta el recargo de seguridad, como es de esperar, los ingresos por primas aumentan y  $r$  crece muy paulatinamente, por lo que la probabilidad de ruina disminuye. En ese sentido, a mayor recargo de seguridad menor es la probabilidad de ruina, además la diferencia entre la probabilidad de ruina y la cota decrece a 0.

En el siguiente gráfico se observa como evolucionan los ingresos por primas al variar el recargo de seguridad:

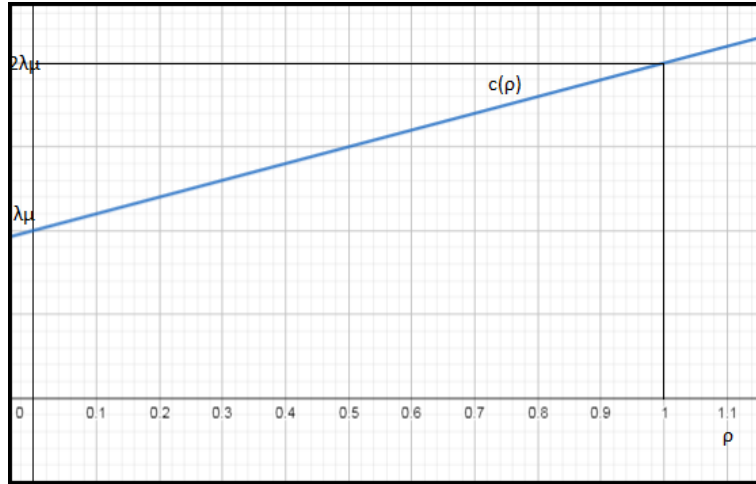


Figura 5: Variación de  $c(\rho)$ .

Adjuntamos también el gráfico del comportamiento del coeficiente de ajuste  $r$  en función del recargo de seguridad. Fijemonos en que cuando el recargo es del 100 % el máximo valor que adquiere  $r$  coincide con  $\frac{1}{2\mu}$ .

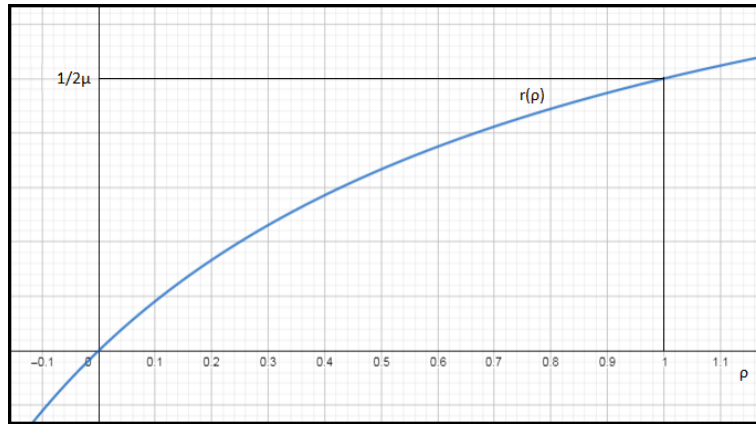


Figura 6: Variación de  $r(\rho)$ .

#### VALORES DE $\lambda$ GRANDES

El primer caso visto es muy analítico, es por ello que es razonable plantear valores de  $\lambda$  mayores al propuesto. Por lo que repetiremos el caso de la variación del capital inicial para un valor de  $\lambda = 10000$ . Igual que en el caso anterior se resumen los valores de los parámetros en la siguiente tabla:



Parámetro	Valor
$\lambda$	10.000
$\mu$	100
$\rho$	0,1
$c$	1100000
$r$	$\frac{1}{1100}$

Cuadro 4: Hipótesis de la aplicación con la exponencial con variación de  $u$  y  $\lambda$  grande.

A partir de los datos contenidos en esta tabla y usando el programa en C del Anexo 10.2.1 se obtienen exactamente los mismos valores que para el caso en que  $\lambda$  es igual a 1, se pueden ver los resultados en el Anexo 10.1.3. Este hecho es debido a que valor de  $\lambda$  no influye en la probabilidad de ruina cuando se varía el capital inicial, dado que no afecta al valor de  $r$  ni de  $u$ .

Una vez visto este caso, es evidente que se pueden extrapolar los resultados para cualquier función de distribución que se use y independientemente si se estudia la variación del capital inicial o el recargo de seguridad.

## 8.2. CASO GAMMA

Suponemos en este caso que el coste de los siniestros sigue una distribución Gamma, para que el estudio entre las distintas funciones de distribución sea interesante, se escogen los parámetros de Gamma tales que, la esperanza coincida con el caso exponencial. Es decir, que tenga  $E[X] = 100$ , es por ello que se tiene  $X \sim \text{Gamma}(200, 2)$ .

**Observación 8.3.** En primer lugar es necesario hacer la siguiente observación para encontrar el valor del coeficiente de ajuste  $r$ . Se tiene que

$$M_{Z_1}(h) = M_{X_1}(h) \cdot M_{cY_1}(-h) = 1. \quad (8.7)$$

Esta igualdad sirve para el cálculo del coeficiente de ajuste, pero observemos que se puede expresar de una manera que facilita su cálculo.

$$M_{X_1}(h) = \frac{1}{M_{cY_1}(h)} = \frac{1}{\frac{\lambda}{\lambda+ch}} = \frac{\lambda+ch}{\lambda} = 1 + \frac{ch}{\lambda} = 1 + h \cdot (1 + \rho)EX_1.$$

Por lo tanto se simplifica el cálculo del coeficiente al conocimiento de la función generatriz de momentos de  $X$ .

### 8.2.1. VARIACIÓN DEL CAPITAL INICIAL

Para ver como se comporta la probabilidad de ruina en variar el valor de  $u$  se construye la siguiente tabla siguiendo los valores supuestos para el caso exponencial:

Parámetro	Valor
$\lambda$	1
$\alpha$	200
$\beta$	2
$\rho$	0.1
$c$	110

Cuadro 5: Hipótesis de la aplicación de *Gamma* con variación de  $u$ .

En este caso el valor de  $r$  depende de los valores que se de a los distintos parámetros. Es por ello que en este caso, siguiendo la Observación 8.3 utilizaremos que

$$M_X(r) = 1 + r \cdot (1 + \rho) \cdot \mu.$$

Por lo tanto, como  $X \sim \text{Gamma}(200, 2)$ , y la función generatriz de momentos de la distribución *Gamma*), se tiene:

$$\left( \frac{2}{2-r} \right)^{200} = 1 + r \cdot 110$$

y el valor exacto de  $r = 1,86692951 \cdot 10^{-3}$ , es menor que 2 y menor que  $\lambda/c = 1/110$ . Viene dado por el programa en C del Anexo 10.2.1.

Se ha comentado en el Teorema 5.9, que para la inecuación de Lundberg un coeficiente  $r$  pequeño implica un mayor riesgo a la cartera. Pero también se ha afirmado que un valor de  $u$  elevado puede contrarrestar el valor del coeficiente de ajuste. Se puede ver que la afirmación es cierta a partir del programa en C del Anexo 10.2.1, del que se obtiene la tabla de valores del Anexo 10.1.4.

Queda evidenciado que aunque se tenga un valor de  $r$  pequeña un capital inicial  $u$  grande hace que la probabilidad de ruina sea pequeña. Por ejemplo, para  $u = 100$ , un valor de capital inicial pequeño la cota de Lundberg es  $8,29698e \cdot 10^{-1}$  por lo que la probabilidad de ruina tiene una cota elevada.

En comparación al caso exponencial se ve como a medida que  $u$  crece, la función de distribución *Gamma* da cotas más pequeñas.

Se puede extender lo visto para el caso exponencial a que la variación de  $\lambda$  no afecta al valor de  $r$  por lo que la cota de Lundberg se mantiene para la función de distribución Gamma.

### 8.2.2. VARIACIÓN DEL RECARGO DE SEGURIDAD

En este apartado estudiaremos como varía la cota de Lundberg al hacer crecer el recargo de seguridad del 0 al 100 %. Se suponen los mismos valores que en el caso anterior, que quedan representados en la siguiente tabla:

Parámetro	Valor
$\lambda$	10000
$\mu$	100
$u$	10000

Cuadro 6: Hipótesis de la aplicación de *Gamma* con variación de  $\rho$ .

En este caso como se varía el valor del recargo de seguridad y para cada porcentaje se tiene un valor de  $r$  distinto. Como en los casos anteriores a partir del programa en C del Anexo 10.2.1 se tiene la tabla del Anexo 10.1.5. En dicha tabla observamos que a medida que se aumenta el recargo de seguridad aumenta el valor de  $r$  por lo que cada vez la cota de Lundberg es más pequeña.

En comparación con el caso exponencial, aquí la cota de Lundberg es mucho más pequeña, por lo que la probabilidad de ruina seguramente será menor.

### 8.3. MIXTA DE EXPONENCIALES

La mixta de exponenciales es una función de distribución que agrega funciones exponenciales con distinto parámetro y con una ponderación. La función de densidad se puede expresar de la siguiente manera:

$$f_X(x) = a \cdot \alpha e^{-\alpha x} + b \cdot \beta e^{-\beta x}, \quad a + b = 1.$$

**Observación 8.4.** Cuando  $\alpha = \beta$ , se tiene una función exponencial tradicional.

#### 8.3.1. RESULTADOS PREVIOS PARA LA MIXTA DE EXPONENCIALES

En esta sección se estudiará la función mixta de exponenciales para obtener los resultados necesarios para poder calcular la inecuación de Lundberg, dado que para este caso no existe una fórmula explícita para la probabilidad de ruina.

A partir de la función de densidad se puede calcular la esperanza para esta función de distribución, sea  $X \sim MExp(a, \alpha, b, \beta)$ :

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_{(0,\infty)} x f(x) dx = a \int_{(0,\infty)} \alpha e^{-\alpha x} dx + b \int_{(0,\infty)} \beta e^{-\beta x} dx \\ &= \frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\beta}. \end{aligned}$$

Una vez obtenida la Esperanza la siguiente magnitud que se quiere desarrollar es la

función generatriz de momentos, para este caso se tiene:

$$\begin{aligned}
M_x(z) &= E(e^{zX}) = \int_{(0,\infty)} e^{zX} f_X(x) dx \\
&= a \int_{(0,\infty)} \alpha e^{-\alpha x} dx + b \int_{(0,\infty)} \beta e^{-\beta x} dx \\
&= a \frac{\alpha}{\alpha - z} + b \frac{\beta}{\beta - z}.
\end{aligned}$$

A partir de estos resultados ya se pueden suponer valores para realizar el análisis en función de la variación del capital inicial y el recargo de seguridad.

A partir de los resultados anteriores buscamos una ecuación para el coeficiente de ajuste. Por (8.7) tenemos que

$$a \frac{\alpha}{\alpha - h} + b \frac{\beta}{\beta - h} = 1 + h \frac{c}{\lambda},$$

haciendo los cálculos pertinentes en ambos lados de la igualdad se tiene:

$$\frac{c}{\lambda} h^3 + (1 - (\alpha + \beta) \frac{c}{\lambda}) h^2 + (\frac{c}{\lambda} \alpha \beta - b\alpha - a\beta) h = 0,$$

por lo que el valor de  $r$  se obtiene mediante una ecuación de segundo grado, quedándonos siempre con la respuesta en que se resta la raíz cuadrada, ya que es el valor de  $r$  que cumple las implicaciones de la teoría, ser menor que  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\frac{\lambda}{c}$ .

### 8.3.2. VARIACIÓN DEL CAPITAL INICIAL

En primer lugar se deben escoger los valores para que la esperanza de la mixta de exponenciales sea 100 igual que en los casos anteriores, es por ello que se tiene la siguiente tabla, recordemos que para este caso el valor de  $c$  se calcula a partir del recargo de seguridad y la Esperanza de  $X$  y  $N$ .

Parámetro	Valor
$\lambda$	1
$a$	0.3
$b$	0.7
$\alpha$	1/70
$\beta$	7/790
$\rho$	0.1
$c$	110

Cuadro 7: Hipótesis de la aplicación de la mixta de exponenciales con variación de  $u$ .

Como en los casos anteriores se recurre a un programa en C que se encuentra en el Anexo 10.2.2. De que obtenemos el valor de  $r = 8,72926959e - 04$  y la correspondiente tabla de valores que está en el Anexo 10.1.6.

Una vez más concluimos que a medida que aumenta el capital inicial disminuye la probabilidad de ruina. Los resultados obtenidos para este caso son muy similares a la Exponencial del primer apartado, esto se debe principalmente a que tienen el mismo valor esperado.

### 8.3.3. VARIACIÓN DEL RECARGO DE SEGURIDAD

En este apartado se iniciará el valor de  $\rho$  en cero y se observará como reacciona la cota de Lundberg a medida que el recargo se acerque al 100 %. La tabla con los resultados correspondientes se encuentra en el Anexo 10.1.7. Esta muestra como a medida que el valor de  $\rho$  crece la ruina tiene una cota menor. Nuevamente, los resultados obtenidos son muy parecidos a los de la Exponencial. El motivo vuelve a ser el mismo, el valor esperado.

## 8.4. SIMULACIÓN DE DATOS

Otra forma de aproximar el valor de la probabilidad de ruina es mediante la simulación de datos. Mediante el programa R se simula en primer lugar el número de siniestros en un tiempo  $t = 1$ , siguiendo una distribución de Poisson con parámetro  $\lambda = 1$  o  $\lambda = 10000$ . En función del valor del número de siniestros se simulan valores para el importe de los siniestros para una  $Exp(1/100)$ , una  $Gamma(200, 2)$  y una  $Mexp(0,3, 1/70, 0,7, 7/790)$ , todas con  $E[X] = 100$ .

Los scripts de R utilizados para hacer los cálculos se encuentran en el Anexo 10.3. Se ha repetido cada proceso 5 veces para obtener un número medio. La tabla que contiene todos los resultados está adjuntada en el Anexo 10.1.8. A continuación se presentan las medias obtenidas:

	$\lambda = 1$ $c = 110$	$\lambda = 100$ $c = 11000$	$\lambda = 1000$ $c = 110000$
$Exp(0,01)$	0,3244	0,2327	0,0141
$Gamma(200, 2)$	0,2997	0,1571	0,00098
$Mexp(0,3, 1/70, 0,7, 7/790)$	0,3448	0,2187	0,0077

Cuadro 8: Resultados de la simulación.

Los resultados obtenidos para las tres funciones de distribución siguen la misma tendencia, a medida que el valor de  $\lambda$  aumenta, y consecuentemente el valor de los ingresos por primas, la probabilidad de ruina en un periodo tiende a 0.

## 9. CONCLUSIONES

A partir de los resultados teóricos introducidos en las primeras secciones se ha podido desarrollar, para distintas funciones de distribución, aplicaciones que muestran como se comporta la probabilidad de ruina y la cota de Lundberg frente a variaciones en los distintos parámetros.

En primer lugar, concluimos que para las funciones exponenciales se puede dar un valor exacto para la probabilidad de ruina, hecho que facilita la comparación del valor real con la cota de Lundberg. Se ha visto que tanto para la variación del capital inicial como para el recargo de seguridad la diferencia entre ambos resultados es inferior a  $10^{-2}$ . Además, en ambos casos la diferencia entre los dos valores se hace más pequeña a medida que estos crecen.

Como era de esperar en la distribución Exponencial, a mayor valor de  $u$ , menor es la probabilidad de ruina y la Inecuación de Lundberg. Lo mismo sucede para el caso en que el recargo de seguridad es mayor. Como la variación de  $\rho$  hace variar a  $r$  en cada porcentaje, queda demostrado y se puede observar en las Figuras 5 y 6, que cuando el recargo de seguridad es del 100 %, el valor de los ingresos por primas es dos veces el producto de  $\lambda$  por  $\mu$  y el valor de  $r$  es  $1/2\mu$ .

En el supuesto de que el importe de los siniestros se distribuya mediante una Gamma, queda evidenciado que a mayor capital inicial o recargo de seguridad, menor es el coeficiente de Lundberg y por tanto más acotada está la probabilidad de ruina. Además se confirma lo descrito en el Teorema 5.9: un valor de  $r$  pequeño es compensado cuando el capital inicial  $u$  es grande. Destacamos que para la distribución Gamma, a igual esperanza, la cota de Lundberg decrece a mayor velocidad que la Exponencial tanto para  $u$  como  $\rho$ .

Para el caso en que los importes de los siniestros se distribuyen mediante una Mixta de Exponenciales, con el mismo valor esperado que los dos casos anteriores, los resultados obtenidos para la cota de Lundberg son muy parecidos a la Exponencial. El motivo principal es la esperanza junto a que se basan en la misma función de distribución.

Se observa también que para las tres funciones de distribución el valor de  $\lambda$ , parámetro del número de siniestros, no afecta al cálculo de la probabilidad de ruina ni al de la cota de Lundberg. Esto es debido a que los cálculos anteriores dependen de  $r, u$  y  $\rho$  y el valor de  $\lambda$  no modifica ninguno de estos, solo cambia el valor de los ingresos por primas.

Para concluir la parte de aplicaciones, se han simulado valores para el número de siniestros y su importe para las funciones de distribución en un horizonte temporal 1. Se ha llegado a la determinación de que las tres funciones se comportan de forma

similar, tendiendo a 0 a medida que el valor de  $\lambda$  aumenta. El resultado era de esperar debido a que a mayor valor de  $\lambda$  mayores son los ingresos por primas.

En resumen, para los tamaños de reclamación pequeños en tiempo infinito a mayor capital inicial y recargo de seguridad, menor es la probabilidad de ruina. Del mismo modo, para tiempo finito un mayor valor de  $\lambda$  reduce la probabilidad de ruina.

## 10. ANEXO

### 10.1. TABLAS DEL APARTADO 8

#### 10.1.1. Variación del capital inicial de la Exponencial

$u$	$\psi(u) = \frac{1}{1+\rho}e^{-ru}$	$\psi(u) \leq e^{-ru}$	Variación
0.00000e+00	9.09091e-01	1.00000e+00	9.09091e-02
1.00000e+03	3.66264e-01	4.02890e-01	3.66264e-02
2.00000e+03	1.47564e-01	1.62321e-01	1.47564e-02
3.00000e+03	5.94522e-02	6.53974e-02	5.94522e-03
4.00000e+03	2.39527e-02	2.63480e-02	2.39527e-03
5.00000e+03	9.65031e-03	1.06153e-02	9.65031e-04
6.00000e+03	3.88802e-03	4.27682e-03	3.88802e-04
7.00000e+03	1.56645e-03	1.72309e-03	1.56645e-04
8.00000e+03	6.31106e-04	6.94216e-04	6.31106e-05
9.00000e+03	2.54266e-04	2.79693e-04	2.54266e-05
1.00000e+04	1.02441e-04	1.12686e-04	1.02441e-05
$u \rightarrow \infty$	0.00000e+00	0.00000e+00	0.00000e+00

Cuadro 9: Resultados en función de  $u$  para el coste de los siniestros siguiendo una  $Exp(1/100)$ .

#### 10.1.2. Variación del recargo de seguridad de la Exponencial

$\rho$	$c = (1 + \rho)\lambda\mu$	$r = \frac{1}{\mu} \frac{\rho}{\rho+1}$	$\psi(u) = \frac{1}{1+\rho}e^{-ru}$	$\psi(u) \leq e^{-ru}$	Variación
0.00000e+00	1.00000e+02	0.00000e+00	1.00000e+00	1.00000e+00	0.00000e+00
1.00000e-01	1.10000e+02	9.09091e-04	1.02441e-04	1.12686e-04	1.02441e-05
2.00000e-01	1.20000e+02	1.66667e-03	4.81479e-08	5.77775e-08	9.62958e-09
3.00000e-01	1.30000e+02	2.30769e-03	7.30931e-11	9.50210e-11	2.19279e-11
4.00000e-01	1.40000e+02	2.85714e-03	2.78906e-13	3.90469e-13	1.11562e-13
5.00000e-01	1.50000e+02	3.33333e-03	2.22549e-15	3.33824e-15	1.11275e-15
6.00000e-01	1.60000e+02	3.75000e-03	3.23472e-17	5.17556e-17	1.94083e-17
7.00000e-01	1.70000e+02	4.11765e-03	7.70614e-19	1.31004e-18	5.39430e-19
8.00000e-01	1.80000e+02	4.44444e-03	2.77173e-20	4.98911e-20	2.21738e-20
9.00000e-01	1.90000e+02	4.73684e-03	1.41060e-21	2.68013e-21	1.26954e-21
1.00000e+00	2.00000e+02	5.00000e-03	9.64375e-23	1.92875e-22	9.64375e-23

Cuadro 10: Resultados en función de  $\rho$  para el coste de los siniestros siguiendo una  $Exp(1/100)$ .



### 10.1.3. VALORES DE $\lambda$ GRANDES

$u$	$\psi(u) = \frac{1}{1+\rho}e^{-ru}$	$\psi(u) \leq e^{-ru}$	Variación
0.00000e+00	9.09091e-01	1.00000e+00	9.09091e-02
1.00000e+03	3.66264e-01	4.02890e-01	3.66264e-02
2.00000e+03	1.47564e-01	1.62321e-01	1.47564e-02
3.00000e+03	5.94522e-02	6.53974e-02	5.94522e-03
4.00000e+03	2.39527e-02	2.63480e-02	2.39527e-03
5.00000e+03	9.65031e-03	1.06153e-02	9.65031e-04
6.00000e+03	3.88802e-03	4.27682e-03	3.88802e-04
7.00000e+03	1.56645e-03	1.72309e-03	1.56645e-04
8.00000e+03	6.31106e-04	6.94216e-04	6.31106e-05
9.00000e+03	2.54266e-04	2.79693e-04	2.54266e-05
1.00000e+04	1.02441e-04	1.12686e-04	1.02441e-05

Cuadro 11: Resultados en función de  $u$  para el coste de los siniestros siguiendo una  $Exp(1/100)$  y una  $\lambda$  grande.

### 10.1.4. Variación del capital inicial de la Gamma

$u$	$\psi(u) \leq e^{-ru}$
0.00000e+00	1.00000e+00
1.00000e+03	1.54598e-01
2.00000e+03	2.39004e-02
3.00000e+03	3.69495e-03
4.00000e+03	5.71230e-04
5.00000e+03	8.83109e-05
6.00000e+03	1.36526e-05
7.00000e+03	2.11067e-06
8.00000e+03	3.26304e-07
9.00000e+03	5.04458e-08
1.00000e+04	7.79881e-09
$u \rightarrow \infty$	0

Cuadro 12: Resultados en función de  $u$  para el coste de los siniestros siguiendo una  $Gamma(200, 2)$

### 10.1.5. Variación del recargo de seguridad de Gamma

$\rho$	$c$	$r$	$\psi(u) \leq e^{-ru}$
0.00000e+00	1.00000e+02	1.39008e-06	9.86195e-01
1.00000e-01	1.10000e+02	1.86693e-03	7.79886e-09
2.00000e-01	1.20000e+02	3.52224e-03	5.04777e-16
3.00000e-01	1.30000e+02	5.00695e-03	1.79931e-22
4.00000e-01	1.40000e+02	6.35143e-03	2.60679e-28
5.00000e-01	1.50000e+02	7.57877e-03	1.21846e-33
6.00000e-01	1.60000e+02	8.70691e-03	1.53585e-38
7.00000e-01	1.70000e+02	9.75004e-03	4.53010e-43
8.00000e-01	1.80000e+02	1.07196e-02	2.78973e-47
9.00000e-01	1.90000e+02	1.16248e-02	3.26842e-51
1.00000e+00	2.00000e+02	1.24733e-02	6.74715e-55

Cuadro 13: Hipótesis de la aplicación de *Gamma* con variación de  $\rho$ .

### 10.1.6. Variación del capital inicial de la Mixta de Exponenciales

$u$	$\psi(u) \leq e^{-ru}$
0.00000e+00	1.00000e+00
1.00000e+03	4.17727e-01
2.00000e+03	1.74496e-01
3.00000e+03	7.28917e-02
4.00000e+03	3.04488e-02
5.00000e+03	1.27193e-02
6.00000e+03	5.31320e-03
7.00000e+03	2.21947e-03
8.00000e+03	9.27131e-04
9.00000e+03	3.87288e-04
1.00000e+04	1.61781e-04
$u \rightarrow \infty$	0

Cuadro 14: Resultados en función de  $u$  para el coste de los siniestros siguiendo una  $Mexp(0,3, 1/70, 0,7, 7/790)$ .

### 10.1.7. Variación del recargo de seguridad para la Mixta de Exponenciales

$\rho$	$c$	$r$	$\psi(u) \leq e^{-ru}$
0.00000e+00	1.00000e+02	0.00000e+00	1.00000e+00
1.00000e-01	1.10000e+02	8.72927e-04	1.61781e-04
2.00000e-01	1.20000e+02	1.59621e-03	1.16877e-07
3.00000e-01	1.30000e+02	2.20472e-03	2.66092e-10
4.00000e-01	1.40000e+02	2.72331e-03	1.48876e-12
5.00000e-01	1.50000e+02	3.17020e-03	1.70611e-14
6.00000e-01	1.60000e+02	3.55903e-03	3.49408e-16
7.00000e-01	1.70000e+02	3.90022e-03	1.15233e-17
8.00000e-01	1.80000e+02	4.20184e-03	5.64454e-19
9.00000e-01	1.90000e+02	4.47028e-03	3.85319e-20
1.00000e+00	2.00000e+02	4.71061e-03	3.48392e-21

Cuadro 15: Resultados en función de  $\rho$  para el coste de los siniestros siguiendo una  $Mexp(0,3, 1/70, 0,7, 7/790)$ .

### 10.1.8. SIMULACIONES

	$\lambda = 1$ $c = 110$	$\lambda = 100$ $c = 11000$	$\lambda = 1000$ $c = 110000$
$Exp(0,01)$	0,3244	0,2316	0,0136
$Exp(0,01)$	0,3284	0,232	0,0148
$Exp(0,01)$	0,328	0,2316	0,0124
$Exp(0,01)$	0,3182	0,2317	0,0147
$Exp(0,01)$	0,3232	0,2368	0,015
$Gamma(200, 2)$	0,2997	0,1605	0,001
$Gamma(200, 2)$	0,3026	0,1519	0,001
$Gamma(200, 2)$	0,3015	0,157	0,0011
$Gamma(200, 2)$	0,3009	0,1594	0,0011
$Gamma(200, 2)$	0,2974	0,1568	0,0007
$MExp(0,3, 1/70, 0,7, 7/790)$	0,3524	0,2199	0,0079
$MExp(0,3, 1/70, 0,7, 7/790)$	0,348	0,2138	0,0077
$MExp(0,3, 1/70, 0,7, 7/790)$	0,3398	0,2217	0,0062
$MExp(0,3, 1/70, 0,7, 7/790)$	0,3458	0,2203	0,009
$MExp(0,3, 1/70, 0,7, 7/790)$	0,3371	0,218	0,0076

Cuadro 16: Resultados de la simulación.

## 10.2. CÁLCULO DE LA PROBABILIDAD DE RUINA Y LA INECUANCION DE LUNDBERG EN C, PARA EL APARTADO 8

### 10.2.1. FUNCIÓN EXPONENCIAL Y GAMMA

A continuación se presenta el programa en C que se ha utilizado para el cálculo de las tablas del apartado 8. De hecho, con este programa se pueden calcular los valores para cualquier  $\lambda, \mu, \alpha, \beta, u, \rho, c$ .

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <math.h>

int main(void){
    int dist, par, max, trobat=0;
    double lam, mu, c=0, u=0, r, rho, dif, ru, cl, e
=2.718281828, alpha, beta, tol=1.e-8, aux1, aux2;
    printf("Funci\ 'on de distribuci\ 'on del coste de los
siniestros, 0=Exp, 1=Gamma\n");
    scanf("%d",&dist);
    printf("Par\ 'ametro a estudiar, 1=capital inicial, 2=
recargo de seguridad\n");
    scanf("%d",&par);

    if(dist==0){
        if(par==1){
            printf("M\ 'aximo valor, anterior al infinito que
se quiere estudiar\n");
            scanf("%d",&max);
            printf("Dar valor de lambda, mu y rho\n");
            scanf("%le %le %le",&lam, &mu, &rho);
            c=lam*mu*(1+rho);
            r=rho/(mu*(1+rho));
            printf("El valor de c es %le y el valor de r es
%le. \n",c, r);
            printf("u Ruina exacta inecuaci\ 'on de Lundberg
Diferencia\n");
            for(u=0;u<=max;u+=max/10){
                ru=(1/(1+rho))*pow(e,-r*u);
                cl=pow(e,-r*u);
                dif=fabs(ru-cl);
                printf("%5.5le & %5.5le & %5.5le & %5.5le \n
", u, ru, cl, dif);
            }
        }
    }
}
```

```

    }
    if(par==2){
        printf("Dar valor de lambda, mu y u\n");
        scanf("%d %d %d",&lam, &mu,&u);
        printf("rho c r Ruina exacta inecuaci'on de
Lundberg Diferencia\n");
        for(rho=0;rho<=1;rho+=0.1){
            c=(1+rho)*lam*mu;
            r=rho/(mu*(1+rho));
            ru=(1/(1+rho))*pow(e,-r*u);
            cl=pow(e,-r*u);
            dif=fabs(ru-cl);
            printf("%5.5le & %5.5le & %5.5le & %5.5le &
%5.5le & %5.5le \n", rho, c, r, ru, cl, dif);
        }
    }
}
if(dist==1){
    if(par==1){
        printf("M'aximo valor, anterior al infinito que
se quiere estudiar\n");
        scanf("%d",&max);
        printf("Dar valor de lambda, alpha, beta y rho\n
");
        scanf("%d %d %d %d",&lam, &alpha, &beta, &
rho);
        c=lam*(alpha/beta)*(1+rho);
        r=1;
        while(trobat==0){
            aux1=pow(beta/(beta-r),alpha);
            aux2=1+c*r/lam;
            if(fabs(aux1-aux2)<tol){
                trobat=1;
            }else{
                if(aux1>aux2){
                    r-=r/10;
                }
                if(aux1<aux2){
                    r+=r/10;
                }
            }
        }
        printf("El valor de r es %5.8le aux1 %5.5le aux2
%5.5le\n", r, aux1, aux2);
        printf("valor u Cota Lundberg\n");
        for(u=0;u<=max;u+=max/10){

```

```

        cl=pow(e,-r*u);
        printf("%5.5le & %5.5le\n", u, cl);
    }
}
if(par==2){
    printf("Dar valor de lambda, alpha, beta y u\n");
;
    scanf("%le %le %le %le",&lam, &alpha, &beta, &u)
;

    printf("rho c r Inecuaci\'on de Lundberg\n");
    for(rho=0;rho<=1;rho+=0.1){
        c=(1+rho)*lam*(alpha/beta);
        r=1;
        trobat=0;
        while(trobat==0){
            aux1=pow(beta/(beta-r),alpha);
            aux2=1+c*r/lam;
            if(fabs(aux1-aux2)<tol){
                trobat=1;
            }else{
                if(aux1>aux2){
                    r-=r/10;
                }
                if(aux1<aux2){
                    r+=r/10;
                }
            }
        }
        cl=pow(e,-r*u);
        printf("%5.5le & %5.5le & %5.5le & %5.5le\n"
, rho, c, r, cl);
    }
}

return 0;
}

```

El programa pide al usuario la función de distribución que siguen los importes de reclamación, en función de que parámetro se quiere ver como varía la ruina o el coeficiente y los parámetros de la función de distribución. En función de la información facilitada el resultado es una tabla con 10 valores para el parámetro que se varía y sus respectivos resultados para la probabilidad de ruina o cota de Lundberg.

### 10.2.2. MIXTA DE EXPONENCIALES

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <math.h>

int main (void){
    int trobat = 0, max, par;
    double a, b, alpha, beta, A, B, C, c, r, u, rho, cl, lam,
        e = 2.718281828;
    printf ("M\`aximo valor, anterior al infinito que se
        quiere estudiar\n");
    scanf ("%d", &max);
    printf ("Dar valores de a, b, alpha y beta\n");
    scanf ("%le %le %le %le", &a, &b, &alpha, &beta);
    printf ("Par\`ametro a variar 0=capital inicial, 1=recargo
        de seguridad\n");
    scanf ("%d", &par);
    if (par == 0)
    {
        printf ("Dar valor de lambda y rho\n");
        scanf ("%le %le", &lam, &rho);
        c = lam * ((a / alpha) + (b / beta)) * (1 + rho);
        printf ("c %5.5le alpha %5.5le beta %5.5le\n", c,
            alpha, beta);
        A = c / lam;
        B = 1 - ((alpha + beta) * c / lam);
        C = (c * alpha * beta / lam) - (b * alpha) - (a * beta
        );
        printf ("A %5.5le B %5.5le C %5.5le\n", A, B, C);
        r = (-B - sqrt (pow (B, 2) - 4 * A * C)) / (2 * A);
        printf ("El valor de r es %5.8le \n", r);
        printf ("valor u      Cota Lundberg\n");
        for (u = 0; u <= max; u += max / 10)
        {
            cl = pow (e, -r * u);
            printf ("%5.5le & %5.5le\n", u, cl);
        }
    }
    if (par == 1){
        printf ("Dar valor de lambda y u\n");
        scanf ("%le %le", &lam, &u);
        printf ("rho c r Inecuaci\`on de Lundberg\n");
        for (rho=0;rho<=1;rho+=0.1){
            c = lam * ((a / alpha) + (b / beta)) * (1 + rho);
            A = c / lam;
```

```

        B = 1 - ((alpha + beta) * c / lam);
        C = (c * alpha * beta / lam) - (b * alpha) - (a *
beta);
        r = (-B - sqrt (pow (B, 2) - 4 * A * C)) / (2 * A);
        cl=pow(e,-r*u);
        printf(" %5.5le & %5.5le & %5.5le & %5.5le\n", rho, c
, r, cl);
    }
}

return 0;
}

```

### 10.3. SIMULACIÓN DE DATOS EN R, PARA EL APARTADO 8.4

En este apartado se presentan todos los scripts de R utilizados para el cálculo de las distintas probabilidades de Ruina en un tiempo 1 del apartado 8.4.

**10.3.1.**  $X \sim Exp(0,01)$   $\lambda = 1$   $c = 110$ .

```

i<-1
lam<-1
c<-110*lam
m<-10000
v<-1:m
x<-1:10
ruina<-0
contador<-0
s<-1:m
for(i in 1:m){
  n<-rpois(1,lam)
  v[i]<-n
  if(v[i]==0){
    for(l in 1:v[i]){
      x[l]<-0
      s[i]<-0
    }
  }else{
    contador<-contador+1
    k<-1
    for(k in 1:v[i]){
      x[k]<-0
    }
    j<-1
    s[i]<-0
  }
}

```



```

        for(j in 1:v[i]){
            x[j]<-rexp(0.01)
            s[i]<-s[i]+x[j]
        }
        if(c-s[i]<0){
            ruina<-ruina+1
        }
    }
}
pruina<-ruina/m
pruina

```

**10.3.2.**  $X \sim \text{Exp}(0,01)$   $\lambda = 100$   $c = 11000$ .

```

i<-1
lam<-100
c<-110*lam
m<-10000
v<-1:m
x<-1:120
ruina<-0
contador<-0
s<-1:m
for(i in 1:m){
    n<-rpois(1,lam)
    v[i]<-n
    if(v[i]==0){
        for(l in 1:v[i]){
            x[l]<-0
            s[i]<-0
        }
    }else{
        contador<-contador+1
        k<-1
        for(k in 1:v[i]){
            x[k]<-0
        }
        j<-1
        s[i]<-0
        for(j in 1:v[i]){
            x[j]<-rexp(0.01)
            s[i]<-s[i]+x[j]
        }
        if(c-s[i]<0){
            ruina<-ruina+1
        }
    }
}

```

```

}
pruina<-ruina/m
pruina

```

**10.3.3.**  $X \sim \text{Exp}(0,01)$   $\lambda = 1000$   $c = 110000$ .

```

i<-1
lam<-1000
c<-110*lam
m<-10000
v<-1:m
x<-1:1200
ruina<-0
contador<-0
s<-1:m
for(i in 1:m){
  n<-rpois(1,lam)
  v[i]<-n
  if(v[i]==0){
    for(l in 1:v[i]){
      x[l]<-0
      s[i]<-0
    }
  } else {
    contador<-contador+1
    k<-1
    for(k in 1:v[i]){
      x[k]<-0
    }
    j<-1
    s[i]<-0
    for(j in 1:v[i]){
      x[j]<-rexp(0.01)
      s[i]<-s[i]+x[j]
    }
    if(c-s[i]<0){
      ruina<-ruina+1
    }
  }
}
pruina<-ruina/m
pruina

```

**10.3.4.**  $X \sim \text{Gamma}(200,2)$   $\lambda = 1$   $c = 110$ .

```

i<-1
lam<-1

```

```

c<-110*lam
m<-10000
v<-1:m
x<-1:10
ruina<-0
contador<-0
s<-1:m
for(i in 1:m){
  n<-rpois(1, lam)
  v[i]<-n
  if(v[i]==0){
    for(l in 1:v[i]){
      x[l]<-0
      s[i]<-0
    }
  }else{
    contador<-contador+1
    k<-1
    for(k in 1:v[i]){
      x[k]<-0
    }
    j<-1
    s[i]<-0
    for(j in 1:v[i]){
      x[j]<-rgamma(1, 200, 2)
      s[i]<-s[i]+x[j]
    }
    if(c-s[i]<0){
      ruina<-ruina+1
    }
  }
}
pruina<-ruina/m
pruina

```

**10.3.5.**  $X \sim \text{Gamma}(200, 2)$   $\lambda = 100$   $c = 11000$ .

```

i<-1
lam<-100
c<-110*lam
m<-10000
v<-1:m
x<-1:120
ruina<-0
contador<-0
s<-1:m
for(i in 1:m){

```

```

n<-rpois(1,lam)
v[i]<-n
if(v[i]==0){
  for(l in 1:v[i]){
    x[l]<-0
    s[i]<-0
  }
}else{
  contador<-contador+1
  k<-1
  for(k in 1:v[i]){
    x[k]<-0
  }
  j<-1
  s[i]<-0
  for(j in 1:v[i]){
    x[j]<-rgamma(1, 200,2)
    s[i]<-s[i]+x[j]
  }
  if(c-s[i]<0){
    ruina<-ruina+1
  }
}
}
pruina<-ruina/m
pruina

```

**10.3.6.**  $X \sim \text{Gamma}(200, 2)$   $\lambda = 1000$   $c = 110000$ .

```

i<-1
lam<-1000
c<-110*lam
m<-10000
v<-1:m
x<-1:1200
ruina<-0
contador<-0
s<-1:m
for(i in 1:m){
  n<-rpois(1,lam)
  v[i]<-n
  if(v[i]==0){
    for(l in 1:v[i]){
      x[l]<-0
      s[i]<-0
    }
  }else{

```

```

    contador<-contador+1
    k<-1
    for(k in 1:v[i]){
      x[k]<-0
    }
    j<-1
    s[i]<-0
    for(j in 1:v[i]){
      x[j]<-rgamma(1, 200,2)
      s[i]<-s[i]+x[j]
    }
    if(c-s[i]<0){
      ruina<-ruina+1
    }
  }
}
pruina<-ruina/m
pruina

```

**10.3.7.**  $X \sim MExp(0,3,1/70,0,7,7/790)$   $\lambda = 1$   $c = 110$ .

```

i<-1
lam<-1
c<-110*lam
m<-10000
v<-1:m
x<-1:10
ruina<-0
contador<-0
s<-1:m
for(i in 1:m){
  n<-rpois(1,lam)
  v[i]<-n
  if(v[i]==0){
    for(l in 1:v[i]){
      x[l]<-0
      s[i]<-0
    }
  }else{
    contador<-contador+1
    k<-1
    for(k in 1:v[i]){
      x[k]<-0
    }
    j<-1
    s[i]<-0
    for(j in 1:v[i]){

```

```

        x[j]<-0.3*rexp(1,0.01428571426)+0.7*rexp
(1,0.008860759494)
        s[i]<-s[i]+x[j]
    }
    if(c-s[i]<0){
        ruina<-ruina+1
    }
}
}
pruina<-ruina/m
pruina

```

**10.3.8.**  $X \sim MExp(0,3,1/70,0,7,7/790)$   $\lambda = 100$   $c = 11000$ .

```

i<-1
lam<-100
c<-110*lam
m<-10000
v<-1:m
x<-1:120
ruina<-0
contador<-0
s<-1:m
for(i in 1:m){
    n<-rpois(1,lam)
    v[i]<-n
    if(v[i]==0){
        for(l in 1:v[i]){
            x[l]<-0
            s[i]<-0
        }
    }else{
        contador<-contador+1
        k<-1
        for(k in 1:v[i]){
            x[k]<-0
        }
        j<-1
        s[i]<-0
        for(j in 1:v[i]){
            x[j]<-0.3*rexp(1,0.01428571426)+0.7*rexp
(1,0.008860759494)
            s[i]<-s[i]+x[j]
        }
        if(c-s[i]<0){
            ruina<-ruina+1
        }
    }
}

```

```

    }
  }
  pruína<-ruína/m
  pruína

```

**10.3.9.**  $X \sim MExp(0,3,1/70,0,7,7/790)$   $\lambda = 1000$   $c = 110000$ .

```

i<-1
lam<-1000
c<-110*lam
m<-10000
v<-1:m
x<-1:1200
ruína<-0
contador<-0
s<-1:m
for(i in 1:m){
  n<-rpois(1,lam)
  v[i]<-n
  if(v[i]==0){
    for(l in 1:v[i]){
      x[l]<-0
      s[i]<-0
    }
  }else{
    contador<-contador+1
    k<-1
    for(k in 1:v[i]){
      x[k]<-0
    }
    j<-1
    s[i]<-0
    for(j in 1:v[i]){
      x[j]<-0.3*rexp(1,0.01428571426)+0.7*rexp
(1,0.008860759494)
      s[i]<-s[i]+x[j]
    }
    if(c-s[i]<0){
      ruína<-ruína+1
    }
  }
}
pruína<-ruína/m
pruína

```

## Referencias

- [1] Mikosch, Thomas: *Non-Life Insurance Mathematics, An Introduction with Stochastic Processes*. Springer-Verlag, Heidelberg, 2004.
- [2] Embrechts, Paul; Klüppelberg, Claudia; Mikosch, Thomas : *Modelling Extremal Events fo Insurance and Finance*. Springer-Verlag, Heidelberg, 1997.
- [3] Panjer, Harry H.; Willmot, Gordon E. : *Insurance Risk Models*. Society of actuaries, USA, 1992.
- [4] Albrecher, Hansjörg; Beirlant, Jan; Teugels, Jozef L. : *Reinsurance: Actuarial and Statistical Aspects*. John Willey & Sons Ltd, Hoboken, 2017.
- [5] Feller, William: *An Introduction to Probability Theory and Its Aplications II*. Willey, New York, 1996.
- [6] Castañer Anna; Claramunt Bielsa, M. Mercè: *Solvencia II, 2a edició*n. Univer-sitat de Barcelona, OMADO, 2017.
- [7] Statistics How To: *Heavy Tailed Distribution Light Tailed Distribution: Definition Examples*. [en línea]. [consulta:10 de enero de 2019]. Disponible a: <<https://www.statisticshowto.datasciencecentral.com/heavy-tailed-distribution/>>